



**Ana Catarina dos
Santos Carapito**

**Estabilidade de Sistemas Comutados com Reset
Parcial**



**Ana Catarina dos
Santos Carapito**

**Estabilidade de Sistemas Comutados com Reset
Parcial**

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Matemática, realizada sob a orientação científica da Doutora Maria Paula Macedo Rocha Malonek, Professora Catedrática do Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores da Universidade do Porto e co-orientação científica da Doutora Isabel Alexandra Vieira Brás, Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

Apoio financeiro da FCT, Bolsa de
Doutoramento SFRH/BD/31400/2006.

À minha querida filha Inês,
que ilumina cada instante da minha vida.

o júri

presidente

Doutor Joaquim Manuel Vieira
Professor Catedrático da Universidade de Aveiro

vogais

Doutora Maria de Fátima Silva Leite
Professora Catedrática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

Doutora Maria Paula Macedo Rocha Malonek
Professora Catedrática da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
(Orientadora)

Doutor Edgar Silva Pereira
Professor Auxiliar da Universidade da Beira Interior

Doutora Isabel Alexandra Vieira Brás
Professora Auxiliar da Universidade de Aveiro (Co-Orientadora)

Doutora Rita Isabel Gonçalves Simões
Professora Auxiliar Convidada da Universidade de Aveiro

agradecimentos

Certamente que finalizar uma tese de doutoramento está entre as minhas maiores conquistas, e, sem o apoio directo e indirecto de muitos, tal êxito não me seria possível. É com muito gosto que registo aqui, aleatoriamente, os meus sinceros agradecimentos a todos aqueles que partilharam comigo toda a sua sabedoria, a todos aqueles de cuja presença, existência ou memória me proveio a força e a alegria, e, ainda, a todos aqueles que, estando mais perto e sendo por isso os mais queridos, tiveram de suportar as maiores privações.

À Professora Doutora Maria Paula Macedo Rocha e à Professora Doutora Isabel Alexandra Vieira Brás, pela sabedoria que partilharam comigo, pela dedicação e solicitude, pelo interesse e pelo exame crítico a que sujeitaram algumas das minhas ideias, enfim, pelo exemplo e pelos conselhos que ao longo destes anos eu recebi.

Ao Professor Doutor Andrey Sarychev e à Professora Doutora Fátima Silva Leite, por me terem conduzido até a esta área de investigação.

À Fundação para a Ciência e Tecnologia, pelo apoio financeiro que me prestou, à Universidade da Beira Interior e ao seu Departamento de Matemática, por me terem concedido boas condições durante estes três últimos anos.

A todos os meus amigos que souberam proferir as palavras certas nos momentos certos. À minha eterna amiga Xana, de saudosa memória, por me fazer crer que temos que procurar o nosso *lugar ao sol*

Ao meu marido, pela compreensão e atenção sem reservas. Aos meus pais e à minha irmã, por estarem presentes sempre que precisei e por continuarem a acreditar em mim. Aos meus avós, de saudosas memórias, que me ensinaram a nunca desistir.

Ao meu querido sobrinho Afonso, por todo o carinho que me tem dado. À minha querida filha Inês, a quem eu dedico esta tese, pelo seu amor incondicional e pela esperança de eu ver um dia todo este meu esforço reconhecido e reflectido nos seus próprios esforços.

palavras-chave

Sistemas Comutados, Matriz de Reset, Função de Lyapunov Quadrática Comum, Estabilidade

resumo

A presente tese é dedicada ao estudo da estabilidade de sistemas definidos por famílias finitas de sistemas lineares invariantes e por regras de comutação que coordenam a comutação entre eles. Assumimos que, em cada instante de tempo onde ocorre comutação, a trajetória do estado do sistema possa sofrer um “salto” desencadeado pela aplicação de um reset. Estes sistemas são, neste trabalho, designados por *sistemas comutados com reset*.

Os resets podem ser de dois tipos - totais ou parciais, dependendo se a totalidade ou apenas uma parte das componentes do estado está disponível para reset. Neste sentido, distinguimos sistemas comutados com reset (total) e *sistemas comutados com reset parcial*.

Analizamos a estabilidade dos dois tipos de sistemas comutados referidos à luz da teoria de Lyapunov e sob duas perspectivas; por um lado determinamos sob que condições um sistema comutado com reset é estável e por outro, identificamos resets que, quando aplicados, asseguram a estabilidade do sistema. Neste último ponto, a escolha dos resets adequados a aplicar pode por si só revelar-se insuficiente para obter estabilidade, especialmente se apenas parte das componentes do estado estiver disponível para reset (caso de reset parcial).

keywords

Switched Systems, Reset Matrix, Common Lyapunov Quadratic Function, Stability

abstract

This thesis deals with the stability of systems which are defined by a finite family of time invariant linear systems together with some switching laws. The switching laws determine how the invariant systems commute among themselves. We assume that for each commutation time instant the state trajectory may change discontinuously due to reset application. In this thesis, these systems are designed by *reset switched systems*.

Two types of resets are considered - total and partial, depending if all state components or only part of them are available for reset. In this sense, we distinguish (total) reset switched systems and *partial reset switched systems*.

We analyze the stability of reset switched systems, using Lyapunov theory, under two perspectives. Not only we determine some conditions according to which a reset switched system is stable, but also we identify some resets that, when applied, assure the stability of system. We conclude that, for total reset, it is always possible to choose adequately the resets in order to obtain stability. However, that is not always possible if partial reset is in question.

Índice

Lista de símbolos e abreviaturas	iii
Introdução	vii
1 Sistemas comutados	1
1.1 Conceitos fundamentais	1
1.1.1 Estabilidade de um sistema invariante no tempo	5
1.1.2 Estabilidade de um sistema σ -comutado	6
1.2 Algumas condições suficientes de estabilidade	10
1.2.1 Condições necessárias e suficientes para alguns casos especiais . .	10
1.2.2 Sistemas simultaneamente triangularizáveis	12
1.2.3 Condições suficientes de triangularização simultânea	13
2 Sistemas comutados definidos em blocos	15
2.1 Sistemas comutados triangulares em blocos	15
2.2 O caso geral	20
2.2.1 Redução ao caso triangular	20
2.2.2 Algoritmo	23
2.2.3 Abordagem alternativa para sistemas definidos em 2×2 -blocos .	28
2.3 Estabilidade de sistemas comutados interconectados	33
2.3.1 Interconexão em série e em paralelo	33
2.3.2 Interconexão por realimentação	38
3 Sistemas comutados com reset	43
3.1 Conceitos fundamentais	44
3.2 Critérios de estabilidade	46
3.2.1 Redução a uma dinâmica sem reset	46

3.2.2	Abordagem directa	53
3.3	Obtenção de estabilidade por escolha dos resets	56
3.4	Considerações finais	60
4	Sistemas comutados com reset parcial	63
4.1	Conceitos fundamentais	63
4.2	Critério de estabilidade	65
4.2.1	Um caso particular	69
4.3	Obtenção de estabilidade por escolha dos resets parciais	70
4.4	Considerações finais	76
5	Existência de FLQs com complemento de Schur comum e estabilização	77
5.1	Outra interpretação e invariância por transformações de semelhança . . .	78
5.2	Sistemas comutados de ordem 2 e de ordem 3	81
5.3	Sistemas comutados com FLQs diagonais em blocos	85
5.4	Sistemas comutados triangulares em blocos	90
5.5	Sistemas comutados positivos	95
5.6	Considerações finais	100
	Conclusões	103
A	Álgebras de Lie	107
B	Matrizes simétricas definidas positivas	111
C	Outro resultado	115
	Bibliografia	121

Lista de símbolos e abreviaturas

Símbolos

\mathbb{N}	conjunto dos números naturais
\mathbb{N}_0	conjunto dos números naturais incluindo o número zero
$\mathbb{R} \ (\mathbb{C})$	conjunto dos números reais (complexos)
\mathbb{R}^+	conjunto dos números reais positivos
$\mathbb{R}^n \ (\mathbb{C}^n)$	espaço dos vectores de n componentes reais (complexas)
$\mathbb{R}^{n \times n} \ (\mathbb{C}^{n \times n})$	espaço das matrizes $n \times n$ com entradas reais (complexas)
$(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{R}}$	\mathbb{R} é o domínio e \mathbb{R}^n o conjunto de chegada de uma função
$\dot{x}(t)$	derivada de x com respeito ao tempo t
\mathcal{P}	conjunto de índices finito
$\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$	conjunto de todos os sinais de comutação
\mathcal{R}	conjunto das matrizes de reset
\mathbb{X}	sistema comutado
\mathbb{X}^R	sistema comutado com reset
\mathbb{X}^{RP}	sistema comutado com reset parcial
\mathbb{X}_{σ}	sistema comutado associado ao sinal de comutação σ

\mathbb{X}_σ^R	sistema comutado com reset associado ao sinal de comutação σ
\mathbb{X}_σ^{RP}	sistema comutado com reset parcial associado ao sinal de comutação σ
0_n	matriz nula $n \times n$
I_n	matriz identidade $n \times n$
$\ A\ $	norma euclidiana de A
$\ A\ _s$	norma espectral da matriz A
$\Re(A)$ ($\Im(A)$)	parte real (imaginária) de A
$\det(A)$	determinante da matriz A
$\text{rank}(A)$	característica da matriz A
$\ker(A)$	núcleo da matriz A
$P > 0$ ($P < 0$)	P é uma matriz definida positiva (negativa)
$P \geq 0$ ($P \leq 0$)	P é uma matriz semi-definida positiva (negativa)
A^{-1}	inversa da matriz A
A^T	transposta da matriz A
A^*	transposta da conjugada da matriz A
$\lambda_{\max}(\cdot)$ ($\lambda_{\min}(\cdot)$)	maior (menor) valor próprio da matriz A
$\max[\cdot]$ ($\min[\cdot]$)	máximo (mínimo) de um conjunto
$[A_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$	matriz $n \times n$ de entradas A_{ij}
$\text{diag}(A_{11}, \dots, A_{nn})$	matriz diagonal $n \times n$ cujos elementos diagonais são A_{11}, \dots, A_{nn}
$A \succeq 0$ ($\succ 0$)	cada entrada da matriz A é não-negativa (positiva)
$x \succeq 0$ ($\succ 0$)	cada componente do vector x é não-negativa (positiva)
$A \succeq 0$ ($\succ 0$)	cada entrada da matriz A é não-negativa (positiva)

Abreviaturas

FLQ(C)	Função de Lyapunov Quadrática (Comum)
FLQ(C)s	Funções de Lyapunov Quadráticas (Comuns)
r -CSC	Complemento de Schur Comum de ordem r

Introdução

Motivação

Em diversas áreas como a Física, a Engenharia, a Economia entre outras, a abordagem a determinados problemas passa pelo estabelecimento de modelos matemáticos representativos dos fenómenos em estudo. Muitos desses problemas ou fenómenos são representados por sistemas de equações diferenciais, e como tal não se pode descurar o facto do modelo matemático ter de satisfazer determinadas propriedades, nomeadamente a da existência, a da unicidade e a da continuidade da solução para as condições iniciais dadas. Porém, para certos casos, pode ser difícil explicitar essa solução, o que compromete a verificação das propriedades referidas, bem como o comportamento da mesma quando o tempo t tende para infinito. Para analisar a última propriedade, que está relacionada com a estabilidade de um sistema de equações diferenciais, houve necessidade de criar um método directo que não pressupusesse o conhecimento da solução do sistema. Este método foi criado pelo matemático Aleksander Mikhailovitch Lyapunov (1857 - 1918), que consiste em determinar uma *Função de Lyapunov* para o sistema.

Enquanto que a estabilidade de um sistema linear invariante é equivalente à existência de uma *Função de Lyapunov Quadrática* (FLQ), a mesma simplicidade não caracteriza o estudo da estabilidade dos sistemas variantes no tempo, no âmbito dos quais se insere os sistemas que vamos tratar - os sistemas lineares comutados.

Um *sistema linear comutado* é um sistema definido por uma família finita de sistemas lineares invariantes (banco de comutação) e por uma regra que coordena a comutação entre eles (sinal de comutação), e, portanto, é um sistema variante no tempo com uma dinâmica constante por pedaços. Para este tipo de sistemas admite-se que a trajectória do estado é uma função contínua, isto é, sem “saltos” nos instantes de tempo.

Na última década, a estabilidade dos sistemas comutados é um assunto que tem merecido inúmeras atenções. Têm-se traduzido, por exemplo, em vários artigos que

sintetizam os principais avanços, [10, 27, 38] e em livros, [26, 45]. Alguns problemas se colocam no estudo da estabilidade de sistemas comutados, [10, 26]: encontrar condições que garantam que o sistema comutado é estável para qualquer sinal de comutação, identificar as classes de sinais de comutação para as quais o sistema comutado é estável e construir um sinal de comutação que garanta a estabilidade do sistema comutado. Algumas situações onde se coloca o primeiro problema, e que influenciou a abordagem adoptada na presente tese, ocorre no controlo de processos que têm um comportamento não-linear, variante no tempo e modelados de forma inexacta, como aqueles que se encontram, por exemplo, na infusão de fármacos, [24]. Os sistemas utilizados nestes casos são, segundo [15], sistemas comutados, a que lhes está associado um banco de controladores finito e uma regra de comutação que define qual o controlador activo em cada instante do tempo. Estes sistemas são designados por *sistemas de controlo comutado*. Ainda no trabalho citado, é contemplada a possibilidade de, em cada instante t_k em que um controlador fica activo, ocorrer reposição da trajectória do estado $x(t)$, traduzida pela condição:

$$x(t_k) = R_{(q,p)}x(t_k^-), \quad (0.0.1)$$

onde q, p tomam valores num conjunto de índices finito \mathcal{P} e $x(t_k^-) := \lim_{t \rightarrow t_k^-} x(t)$. As matrizes $R_{(q,p)}$ são designadas por *matrizes de reset*. Com efeito, reconhecemos que a teoria dos sistemas comutados é útil na análise dos sistemas de controlo comutado com a condição (0.0.1), mas julgamos que essa análise possa ser sustentada, de forma mais natural, por uma classe mais geral de sistemas comutados, onde a continuidade do estado do sistema não seja exigida, como acontece com os sistemas comutados (quando em cada instante de comutação $R_{(q,p)}$ é igual à matriz identidade). Daqui surgiu a designação de *sistemas comutados com reset* e o objectivo de estudar a estabilidade, para sinal de comutação arbitrário, destes sistemas. É sabido que para este problema, uma condição necessária, mas não suficiente para que um sistema comutado seja estável, é que cada sistema invariante do banco de comutação seja estável, ou, possua uma FLQ. No entanto, a existência de uma mesma FLQ para todos os sistemas invariantes, isto é, a existência de uma *Função de Lyapunov Quadrática Comum* é uma condição suficiente de estabilidade, independente do sinal de comutação considerado, [10].

Objectivos

Os objectivos principais desta dissertação são:

- estabelecer condições de existência de FLQC para um sistema comutado;
- definir sistemas comutados com reset (total) e sistemas comutados com reset parcial, tendo em conta se há ou não total liberdade na aplicação de resets nas componentes do estado do sistema. Nesta última situação, caso as últimas z componentes do estado estejam “livres” então, em (0.0.1), as matrizes $R_{(q,p)}$ são do tipo

$$R_{(q,p)} = \begin{bmatrix} I_{n-z} & 0 \\ R_{21}^{(q,p)} & R_{22}^{(q,p)} \end{bmatrix}, \quad (0.0.2)$$

onde I_{n-z} é a matriz identidade de ordem $n - z$ e $R_{22}^{(q,p)}$ é uma matriz invertível de ordem z .

- averiguar se, para além dos sistemas de controlo comutado, para qualquer sistema comutado é também possível garantir a respectiva estabilidade através da aplicação de matrizes de reset (total) adequadas; identificar famílias destas matrizes de reset que garantem a estabilidade do sistema. Note-se que, em [15] apenas é referido que é possível garantir a estabilidade dos sistemas de controlo comutado através da aplicação de matrizes de reset (total) adequadas;
- averiguar quando é que é possível obter estabilidade de um sistema comutado através da aplicação de matrizes de reset do tipo (0.0.2); identificar famílias destas matrizes de reset que garantem a estabilidade do sistema;
- identificar classes de sistemas comutados cuja estabilidade pode ser obtida associando uma família de resets parciais.

Estrutura

Esta dissertação está dividida em cinco capítulos. No primeiro capítulo, definimos sistema linear comutado e revemos algumas das condições que garantem a existência de uma *função de Lyapunov quadrática comum* (FLQC) para um sistema comutado e, ao mesmo tempo, garantem que este seja estável, para sinal de comutação arbitrário.

No segundo capítulo, estabelecemos outras condições de existência de uma FLQC para um sistema comutado, em que as matrizes associadas ao banco de comutação se encontram particionadas em blocos ou podem ser transformadas, por uma mesma transformação de semelhança, em matrizes triangulares em blocos (propriedade de *triangularização simultânea em blocos*). Ainda nesta parte do trabalho, aplicamos os resultados obtidos à análise da estabilidade de sistemas comutados interconectados em série, em paralelo e por realimentação.

No terceiro capítulo, definimos sistema linear comutado com reset e estabelecemos dois critérios de estabilidade para este tipo de sistemas, baseados respectivamente numa análise das trajectórias do sistema e numa análise directa das FLQs que o sistema comutado possui. Na parte final deste capítulo, mostramos que existem famílias de resets que associadas a um sistema comutado garantem a respectiva estabilidade.

No quarto capítulo, alargamos o estudo efectuado para sistemas comutados com reset (total) ao estudo da estabilidade de sistemas comutados para os quais apenas parte das componentes do estado fica disponível para reset. Designaremos estes sistemas por *sistemas comutados com reset parcial* e conduziremos o estudo da estabilidade destes sistemas seguindo os mesmos passos do Capítulo 3. Mais concretamente, iremos estabelecer quando é que um sistema comutado com reset parcial é estável e determinar em que condições é possível obter estabilidade de um sistema comutado através da aplicação de resets parciais adequados. Concluiremos que essas condições estão relacionadas com os complementos de Schur das FLQs do sistema comutado considerado.

No quinto capítulo, analisaremos quando é que essas condições são satisfeitas por determinadas classes de sistemas comutados, nomeadamente os sistemas comutados de 2ª e 3ª ordens, sistemas comutados positivos, sistemas triangulares em blocos e alguns sistemas simultaneamente triangularizáveis em blocos. A estabilização por reset parcial dos sistemas mencionados e, em particular, dos sistemas de controlo comutado decorrerá directamente das condições estabelecidas.

Por fim, apresentam-se as conclusões e as perspectivas para trabalhos futuros.

Capítulo 1

Sistemas comutados

Neste capítulo revemos alguns conceitos e resultados sobre a estabilidade de sistemas lineares comutados, baseados na teoria de Lyapunov. Após uma breve introdução aos sistemas lineares variantes no tempo, definimos um sistema linear comutado como um caso particular dos primeiros, com a particularidade de a variação dos parâmetros ser ditada por uma lei de comutação. Mais concretamente, um sistema comutado é descrito por uma família de sistemas invariantes no tempo e uma regra que coordena a comutação entre estes. A existência de uma função de Lyapunov quadrática comum (FLQC) para todos os sistemas invariantes que constituem o banco de comutação garante a estabilidade do sistema comutado, independentemente da regra de comutação considerada. Neste sentido, porque no estudo da estabilidade dos sistemas considerados neste trabalho não se impõe qualquer restrição no processo de comutação, começamos por rever alguns conceitos e resultados fundamentais que convirá ter presentes adiante.

1.1 Conceitos fundamentais

Consideremos o seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t), \end{cases} \quad (1.1.1)$$

onde $x(t) \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{R}}$ é o *vector de estado* e as suas componentes $x_1(t), \dots, x_n(t)$ as *variáveis de estado*, \mathbb{R}^n é o *espaço de estados*, $u(t) \in (\mathbb{R}^m)^{\mathbb{R}}$ é o *signal de entrada* e $y(t) \in (\mathbb{R}^p)^{\mathbb{R}}$ é o *signal de saída*. As matrizes $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ e $D(t)$ são matrizes de dimensões $\mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbb{R}^{p \times n}$ e $\mathbb{R}^{p \times m}$, respectivamente.

Diz-se que o sistema linear (1.1.1) é *invariante no tempo* se os coeficientes das matrizes são constantes, caso contrário diz-se que o sistema é *variante no tempo*.

Este trabalho é dedicado ao estudo de um tipo particular de sistemas variantes no tempo, os sistemas comutados, que passamos a definir.

Sejam $\mathcal{P} = \{1, \dots, N\}$ um conjunto de índices finito e uma família $\Sigma_{\mathcal{P}} = \{\Sigma_p, p \in \mathcal{P}\}$ de sistemas lineares invariantes

$$\Sigma_p := \begin{cases} \dot{x}(t) &= A_p x(t) + B_p u(t) \\ y(t) &= C_p x(t) + D_p u(t) \end{cases}, p \in \mathcal{P}.$$

À família $\Sigma_{\mathcal{P}}$, associada ao conjunto de matrizes $\{(A_p, B_p, C_p, D_p), p \in \mathcal{P}\}$, chama-se *banco de comutação*.

Definamos ainda um *senal de comutação* em \mathcal{P} como uma função do tempo, constante por pedaços ou seccionalmente constante, contínua à direita, $\sigma : [t_0, +\infty[\rightarrow \mathcal{P}$. Mais concretamente,

$$\begin{aligned} \sigma : [t_0, +\infty[&\longrightarrow \mathcal{P} \\ t &\longmapsto \sigma(t) = i_k, \text{ para } t \in [t_{k-1}, t_k[, \text{ } k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

onde os instantes de tempo $t_k, k \in \mathbb{N}$, tais que $t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k \dots$, são pontos de descontinuidade de σ , designados por *instantes de comutação*. O *conjunto de todos os sinais de comutação* em \mathcal{P} denotamos por $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$.

Define-se um *sistema comutado* como um triplo $\mathbb{X} = (\mathcal{P}, \Sigma_{\mathcal{P}}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}})$, que se interpreta no seguinte sentido. Cada sinal de comutação $\sigma(\cdot) \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ dá origem a um sistema variante no tempo da forma (1.1.1) com $A(t) \equiv A_{\sigma(t)}, B(t) \equiv B_{\sigma(t)}, C(t) \equiv C_{\sigma(t)}$ e $D(t) \equiv D_{\sigma(t)}$, mais precisamente dá origem a um sistema

$$\Sigma_{\sigma} := \begin{cases} \dot{x}(t) &= A_{\sigma(t)} x(t) + B_{\sigma(t)} u(t) \\ y(t) &= C_{\sigma(t)} x(t) + D_{\sigma(t)} u(t) \end{cases}, \text{ para todo o } t \geq t_0, \quad (1.1.2)$$

tal que $x_0 := x(t_0)$ e em cada instante de comutação, t_k ,

$$x(t_k) = x(t_k^-) := \lim_{\substack{t \rightarrow t_k \\ t < t_k}} x(t), \quad (1.1.3)$$

isto é, em cada instante de comutação o estado é uma função contínua. Ao sistema Σ_{σ} dá-se o nome de *sistema σ -comutado*.

Convém salientar que, em geral, num sistema comutado os sinais de comutação são produzidos por um mecanismo supervisor de acordo com determinados objectivos. No entanto, tal mecanismo não é aqui considerado por estarmos interessados em analisar a estabilidade de um sistema comutado para sinal de comutação arbitrário.

Tomemos a entrada $u(t) = 0$, para todo o $t \in \mathbb{R}$, e consideremos o sistema linear variante no tempo dado pela equação linear de estado

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t). \quad (1.1.4)$$

O resultado que se segue garante a existência e unicidade de solução da equação linear de estado (1.1.4), ver por exemplo ([18], p. 101).

Teorema 1.1.1 *Fixado um instante $t_0 \in \mathbb{R}$ e uma condição inicial $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, a equação linear de estado (1.1.4), com $A(t)$ seccionalmente contínua, admite uma única solução*

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0,$$

onde $\Phi(\cdot, t_0)$ é uma função matricial de ordem n , contínua e seccionalmente diferenciável.

A matriz $\Phi(t, t_0)$ é designada por *matriz de transição*, uma vez que transforma o estado no instante t_0 , no estado no instante t .

Observação 1.1.2 *Para o caso de um sistema linear invariante no tempo, dado pela equação linear de estado*

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1.1.5)$$

a solução é dada por

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0,$$

onde

$$\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)} := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k (t - t_0)^k.$$

Quando a entrada u é não-nula, verifica-se que

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau,$$

o que implica que a saída y seja dada por

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t).$$

Note-se que um sistema σ -comutado pode ser encarado como um sistema invariante por pedaços, já que a sua dinâmica coincide com a de um sistema invariante entre dois instantes de comutação. Tendo em conta esta particularidade, mostraremos mais tarde, no Capítulo 3, que a solução de um sistema σ -comutado Σ_σ , descrito por $\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t)$, para uma dada condição inicial x_0 pode ser escrita como

$$x(t, t_0, x_0, \sigma) = \Phi_\sigma(t, t_0)x_0,$$

onde $\Phi_\sigma(t, t_0)$, que representa a matriz de transição do sistema Σ_σ , é dada por

$$\Phi_\sigma(t, t_0) = e^{A_{i_m}(t-t_m)} \prod_{k=m}^1 e^{A_{i_{k-1}}(t_k-t_{k-1})} x_0, \text{ para } t \in [t_m, t_{m+1}[. \quad (1.1.6)$$

Por simplicidade, usamos $x(t)$ para denotar uma trajectória do sistema Σ_σ , sempre que não houver ambiguidade sobre os correspondentes instante inicial e estado inicial.

Definição 1.1.3 O sistema correspondente à equação linear de estado (1.1.4) diz-se *uniformemente e exponencialmente estável* se existirem constantes positivas finitas γ, λ tais que, para quaisquer $t_0 \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, a solução de (1.1.4) satisfaz

$$\|x(t)\| \leq \gamma e^{-\lambda(t-t_0)} \|x_0\|, \quad t \geq t_0.$$

Daqui em diante, referir-nos-emos ao termo estabilidade com o sentido de estabilidade exponencial uniforme.

A estabilidade dos sistemas invariantes e variantes no tempo pode ser estudada com base na existência de funções de Lyapunov que exibem um comportamento particular ao longo das soluções do sistema. Definimos em primeiro lugar esta classe de funções para um sistema com descrição do tipo $\dot{x}(t) = f(x(t))$, [47].

Definição 1.1.4 A função $V(x)$ diz-se uma *função de Lyapunov* para o sistema $\dot{x}(t) = f(x(t))$ se verifica as seguintes condições:

- i) $V(x) > 0$, para todo o $x \neq 0$ e $V(0) = 0$;
- ii) $V(x)$ é uma função C^1 ;
- iii) $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$;
- iv) $\dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot f(x) < 0$, para todo o $x \neq 0$,

onde $\nabla V(x)$ é o vector gradiente de V e \cdot denota o produto escalar. Se, além disso, $V(x)$ for uma função quadrática, isto é, $V(x) = x^T P x$, onde P é uma matriz simétrica, diz-se que se trata de uma *função de Lyapunov quadrática* (FLQ).

Note-se que toda a função quadrática $x^T P x$, com P simétrica e definida positiva, pode ser encarada como a distância de x à origem numa nova métrica associada à matriz P . O facto de $V(x) = x^T P x$ ser uma função de Lyapunov significa então que, na métrica associada a P , a distância à origem decresce ao longo das trajectórias do sistema.

1.1.1 Estabilidade de um sistema invariante no tempo

Como é sabido, a estabilidade de um sistema linear invariante no tempo pode ser caracterizada em termos dos valores próprios da matriz do sistema, de acordo com o próximo resultado.

Teorema 1.1.5 [35] *O sistema correspondente à equação linear de estado (1.1.5) é estável se, e só se, $\Re(\lambda) < 0$, para todo o valor próprio λ da matriz A .*

Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ em que todos os seus valores próprios têm parte real negativa diz-se *estável*.

Decorre da Definição 1.1.4 que uma função quadrática $V(x) = x^T P x$, onde $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz simétrica e definida positiva, é uma FLQ para o sistema $\dot{x}(t) = Ax(t)$ se, e só se,

$$A^T P + P A < 0. \quad (1.1.7)$$

Neste caso, dizemos abreviadamente que P é uma FLQ de A .

A relação entre a existência de uma FLQ para A e os valores próprios desta matriz é estabelecida no teorema que se segue.

Teorema 1.1.6 [19, 35] *A matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é estável se, e só se, se verifica a seguinte condição: para cada matriz simétrica, definida positiva $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existe uma única solução de*

$$A^T P + P A = -Q, \quad (1.1.8)$$

sendo essa solução simétrica e definida positiva.

Observação 1.1.7 *Dada uma matriz estável A e uma matriz simétrica Q , a única solução da equação de Lyapunov (1.1.8) é dada por, [35]:*

$$P = - \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{A t} dt. \quad (1.1.9)$$

O próximo resultado relaciona o efeito de uma transformação de semelhança em A com uma transformação de congruência sobre as soluções da correspondente equação de Lyapunov (1.1.8).

Proposição 1.1.8 [19] *Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz estável e $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz invertível. Então, $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma FLQ de A se, e só se, $T^T P T$ é uma FLQ de $T^{-1} A T$.*

1.1.2 Estabilidade de um sistema σ -comutado

No caso variante no tempo, em particular para um sistema σ -comutado, não é possível dar uma caracterização da estabilidade em termos de valores próprios da matriz $A(t)$ do sistema. No entanto, a teoria de Lyapunov permite estabelecer uma condição suficiente de estabilidade de um sistema variante onde a matriz $A(t)$ é contínua ou seccionalmente contínua, ([18], p. 273).

Teorema 1.1.9 *O sistema (1.1.4) é estável se existir uma função matricial continuamente diferenciável $P(t)$, definida para $t \geq t_0$, com $P(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica e definida positiva, para todo o $t \geq t_0$, tal que*

$$\eta I_n \leq P(t) \leq \rho I_n \quad (1.1.10)$$

e

$$A(t)^T P(t) + P(t) A(t) + \dot{P}(t) \leq -\nu I_n, \quad (1.1.11)$$

onde η, ρ e ν são constantes positivas.

Facilmente reconhecemos que, quando $P(t) \equiv P$, para todo o $t \geq t_0$, com P simétrica e definida positiva, a condição (1.1.10) é satisfeita. Adicionalmente, se em (1.1.11) considerarmos $A(t) \equiv A_{\sigma(t)}$, para todo o $t \geq t_0$ e $\sigma(t) \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}$, tem-se que $V(x) = x^T P x$ é uma FLQ para cada sistema Σ_p , ou, para cada matriz $A_p, p \in \mathcal{P}$. Daqui decorre o critério que se segue, [10].

Corolário 1.1.10 (Critério de Lyapunov) *Seja $\{A_p, p \in \mathcal{P}\}$ um conjunto de matrizes estáveis. O sistema σ -comutado $\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t)$ é estável para todo o sinal de comutação σ se existir uma matriz simétrica definida positiva P tal que*

$$A_p^T P + P A_p < 0, \text{ para todo o } p \in \mathcal{P}. \quad (1.1.12)$$

Definição 1.1.11 Uma função $V(x) = x^T P x$, sendo P uma matriz simétrica e definida positiva, diz-se uma *função de Lyapunov quadrática comum* (FLQC) para o sistema σ -comutado $\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t)$ ou uma função de Lyapunov quadrática comum para o conjunto de matrizes (estáveis) $\{A_p, p \in \mathcal{P}\}$ se a matriz P satisfaz (1.1.12).

De referir que, atendendo à Proposição 1.1.8, um conjunto de matrizes estáveis $\mathcal{A} = \{A_p, p \in \mathcal{P}\}$ em $\mathbb{R}^{n \times n}$ possui uma FLQC real se, e só se, $\hat{\mathcal{A}} = \{T^{-1} A_p T, p \in \mathcal{P}\}$ possui uma FLQC real, para alguma matriz invertível $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Contudo, pode ser conveniente averiguar antes se o conjunto $\hat{\mathcal{A}}$ possui uma FLQC complexa. Na verdade, caso exista uma FLQC complexa para $\hat{\mathcal{A}}$ então, também existe uma FLQC real para esse conjunto e, portanto para \mathcal{A} , que é obtida da primeira tomando a sua parte real. Formalizamos este resultado na proposição que a seguir apresentamos.

Proposição 1.1.12 *Um conjunto de matrizes estáveis $\{A_p, p \in \mathcal{P}\} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ possui uma FLQC em $\mathbb{R}^{n \times n}$ se, e só se, $\{T^{-1}A_pT, p \in \mathcal{P}\}$ possui uma FLQC em $\mathbb{C}^{n \times n}$, para alguma matriz invertível $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$.*

Demonstração: Suponhamos que existe uma matriz invertível $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tal que o conjunto $\{T^{-1}A_pT, p \in \mathcal{P}\}$ possui uma FLQC $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Então, para todo o $p \in \mathcal{P}$,

$$(T^{-1}A_pT)^*P + PT^{-1}A_pT < 0.$$

Multiplicando ambos os membros da desigualdade anterior por $-(T^{-1})^*$ à esquerda e por $-T^{-1}$ à direita, obtém-se por congruência (Teorema B.0.7),

$$-A_p^T(T^{-1})^*PT^{-1} - (T^{-1})^*PT^{-1}A_p > 0. \quad (1.1.13)$$

Definamos as matrizes complexas \hat{Q}_p e \hat{P} por:

$$\begin{aligned} \hat{Q}_p &:= A_p^T(T^{-1})^*PT^{-1} + (T^{-1})^*PT^{-1}A_p \\ \hat{P} &:= (T^{-1})^*PT^{-1} \end{aligned} \quad (1.1.14)$$

e provemos que a parte real da matriz \hat{P} é uma FLQC em $\mathbb{R}^{n \times n}$ para as matrizes $A_p, p \in \mathcal{P}$. De (1.1.14), temos

$$\hat{Q}_p = A_p^T\hat{P} + \hat{P}A_p, \text{ para todo o } p \in \mathcal{P}. \quad (1.1.15)$$

Mas,

$$\begin{aligned} \hat{Q}_p &= \Re(\hat{Q}_p) + \Im(\hat{Q}_p)i \\ \hat{P} &= \Re(\hat{P}) + \Im(\hat{P})i, \end{aligned}$$

pelo que (1.1.15) é equivalente a

$$A_p^T(\Re(\hat{P}) + \Im(\hat{P})i) + (\Re(\hat{P}) + \Im(\hat{P})i)A_p = \Re(\hat{Q}_p) + \Im(\hat{Q}_p)i, \quad (1.1.16)$$

para todo o $p \in \mathcal{P}$. Logo,

$$A_p^T\Re(\hat{P}) + \Re(\hat{P})A_p = \Re(\hat{Q}_p), \quad (1.1.17)$$

para todo o $p \in \mathcal{P}$. Donde, se $\Re(\hat{Q}_p)$ e $\Re(\hat{P})$ são matrizes simétricas e definidas positivas, podemos concluir que $\Re(\hat{P})$ é uma FLQC em $\mathbb{R}^{n \times n}$ para as matrizes A_p ,

com $p \in \mathcal{P}$. Verifica-se facilmente que \hat{P} é uma matriz hermítica e $\Re(\hat{P})$ é uma matriz simétrica. Além disso, como $\hat{P} > 0$ então, para todo o $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, temos

$$0 < x^T \hat{P} x = x^T \Re(\hat{P})x + x^T \Im(\hat{P})x. \quad (1.1.18)$$

Mas, $x^T \Im(\hat{P})x$ é um escalar, pelo que $x^T \Im(\hat{P})x = \left(x^T \Im(\hat{P})x\right)^T$, isto é,

$$x^T \Im(\hat{P})x = x^T (\Im(\hat{P}))^T x.$$

Como $\Im(\hat{P})$ é uma matriz anti-simétrica, temos

$$x^T \Im(\hat{P})x = -x^T \Im(\hat{P})x,$$

o que é equivalente a

$$x^T \Im(\hat{P})x = 0.$$

Logo, por (1.1.18), $x^T \Re(\hat{P})x > 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Analogamente, concluímos que $\Re(\hat{Q}_p) > 0$.

A outra implicação é consequência da Proposição 1.1.8. ■

Definição 1.1.13 Um sistema comutado $\mathbb{X} = (\mathcal{P}, \Sigma_{\mathcal{P}}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}})$ diz-se *estável* se para cada $\sigma \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ o correspondente sistema σ -comutado é estável.

De acordo com a Definição 1.1.11, $V(x) = x^T P x$ é uma FLQC de \mathbb{X} se $V(x)$ for uma FLQC de qualquer dos sistemas σ -comutados associados a \mathbb{X} . Isto equivale a dizer que, $V(x) = x^T P x$ é uma FLQC para a família de sistemas $\Sigma_{\mathcal{P}}$.

Assim, o Critério de Lyapunov (Corolário 1.1.10) pode ser reescrito como:

Corolário 1.1.14 Seja $\mathbb{X} = (\mathcal{P}, \Sigma_{\mathcal{P}}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}})$ um sistema comutado tal que as matrizes $A_p, p \in \mathcal{P}$, do banco de comutação $\Sigma_{\mathcal{P}}$ são estáveis. O sistema \mathbb{X} é estável se existir uma matriz simétrica definida positiva P tal que

$$A_p^T P + P A_p < 0, \quad \text{para todo o } p \in \mathcal{P}. \quad (1.1.19)$$

A finalizar esta secção, salientamos alguns aspectos a ter em consideração no estudo da estabilidade de um sistema comutado $\mathbb{X} = (\mathcal{P}, \Sigma_{\mathcal{P}}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}})$:

- i) a existência de uma FLQC para um sistema comutado \mathbb{X} , é uma condição suficiente para que este seja estável, Corolário 1.1.14. No entanto, o recíproco não é válido, ou seja, um sistema comutado pode ser estável mesmo sem possuir uma FLQC, [40];
- ii) a estabilidade de todos os sistemas invariantes Σ_p , da família $\Sigma_{\mathcal{P}}$, é uma condição necessária para que o sistema comutado seja estável. De facto, se o sistema invariante Σ_p for instável, o sistema \mathbb{X} será instável se se considerar $\sigma(t) = p$, para todo o $t \in [t_0, +\infty[$. O recíproco não é válido, ou seja, o facto de todos os sistemas invariantes serem estáveis não implica que o sistema \mathbb{X} também o seja, [1, 3].

1.2 Algumas condições suficientes de estabilidade

Estabelecido o que deve entender-se, no âmbito deste trabalho, por sistema linear comutado e visto qual a importância da existência de uma FLQC para a análise da estabilidade de um sistema comutado (Critério de Lyapunov), debruçar-nos-emos no problema da existência de uma FLQC. Apesar de nos últimos anos, muitos autores terem contribuído para a resolução deste problema, é ao mesmo tempo reconhecido que esses contributos estão longe do esperado. A prova disso está em não existirem condições necessárias e suficientes mais fáceis de serem testadas do que a própria definição de FLQC, [1], salvo em casos bastante particulares como os que apresentamos na próxima secção.

1.2.1 Condições necessárias e suficientes para alguns casos especiais

Para o problema da existência de FLQC para sistemas comutados de ordem 2, podemos encontrar algumas condições necessárias e suficientes em [40, 42]. Uma condição necessária e suficiente, facilmente verificável, para a existência de uma FLQC para um sistema comutado cujo banco de comutação é constituído por dois sistemas invariantes de ordem 2, é dada no seguinte teorema.

Teorema 1.2.1 *Seja $\mathbb{X} = (\mathcal{P}, \Sigma_{\mathcal{P}}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}})$ um sistema comutado, com $\mathcal{P} = \{1, 2\}$, tal que as matrizes $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ do banco de comutação $\{\Sigma_1, \Sigma_2\}$ são estáveis. Então, o sistema comutado \mathbb{X} possui uma FLQC se, e só se, $A_1 A_2^{-1}$ e $A_1 A_2$ não têm nenhum valor próprio real negativo.*

Existem sistemas comutados que possuem uma FLQC com uma forma particularmente simples, como seja $V(x) = x^T x$. É fácil de reconhecer que, a função $V(x) = x^T x$ é uma FLQC para o sistema comutado \mathbb{X} se, e só se,

$$A_p^T + A_p < 0, \quad \text{para todo } p \in \mathcal{P}. \quad (1.2.1)$$

Algumas classes de matrizes, designadamente as matrizes simétricas e as matrizes normais, verificam a condição anterior.

Teorema 1.2.2 *Seja \mathbb{X} um sistema comutado cujo banco de comutação está associado a um conjunto de matrizes $\{A_p, p \in \mathcal{P}\} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que,*

$$A_p = A_p^T \quad \text{ou} \quad A_p A_p^T = A_p^T A_p,$$

para todo o $p \in \mathcal{P}$. O sistema \mathbb{X} possui $V(x) = x^T x$ como FLQC se, e só se, as matrizes A_p são estáveis para todo o $p \in \mathcal{P}$.

Demonstração: Atendendo ao Teorema 1.1.6, é óbvio que se a condição (1.2.1) é satisfeita então, as matrizes A_p são estáveis, qualquer que seja o $p \in \mathcal{P}$.

Reciprocamente, seja $\mathcal{A} = \{A_p, p \in \mathcal{P}\} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ um conjunto de matrizes estáveis e simétricas, associado a uma família de sistemas $\Sigma_{\mathcal{P}}$.

Seja $A \in \mathcal{A}$, qualquer. Se A é estável e simétrica, então A é definida negativa e, portanto, A^T também o é. Como a soma de matrizes definidas negativas é definida negativa, então $A + A^T < 0$. Como A é uma matriz qualquer do conjunto \mathcal{A} , então a condição (1.2.1) é satisfeita. Se A é uma matriz normal então, atendendo a ([20], p. 105), existe uma matriz ortogonal $O \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $O A O^T$ é uma matriz diagonal em blocos da forma $\text{diag}(B_1, \dots, B_k)$, onde cada bloco B_i é um escalar $b_i \in \mathbb{R}$ ou uma matriz 2×2 do tipo

$$B_i = \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{bmatrix}, p \in \mathcal{P}, \quad (1.2.2)$$

cujos valores próprios são $\alpha_i \pm \beta_i, \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$. Com efeito, os valores próprios de A são os valores próprios dos blocos B_1, \dots, B_k . Como A é uma matriz estável, os valores próprios de A têm parte real negativa. Logo,

$$b_i < 0 \text{ e } \alpha_i < 0.$$

Então, $O(A + A^T)O^T < 0$ e, por congruência (Teorema B.0.7), $A + A^T < 0$. Novamente, como A é uma matriz qualquer do conjunto \mathcal{A} , então a condição (1.2.1) é satisfeita.

Para qualquer dos casos, o sistema comutado \mathbb{X} possui $V(x) = x^T x$ como FLQC. ■

1.2.2 Sistemas simultaneamente triangularizáveis

Um sistema comutado cujo banco de comutação é constituído por sistemas cujas matrizes $A_p, p \in \mathcal{P}$, são triangulares superiores (ou inferiores) é conhecido por *sistema comutado triangular*. Um sistema deste tipo possui sempre uma FLQC, $V(x) = x^T D x$, onde D é uma matriz diagonal definida positiva, que pode ser determinada como é sugerido em [4, 7, 52].

É ainda de salientar que alguns sistemas comutados, apesar de não serem triangulares, podem ser simultaneamente triangularizáveis. É o caso, quando os respectivos bancos de comutação são constituídos por sistemas cujas matrizes $A_p, p \in \mathcal{P}$, podem ser transformadas em matrizes triangulares superiores (ou inferiores) por uma transformação de semelhança associada a uma matriz complexa invertível, T . Sempre que para cada p exista uma matriz T nessas condições tal que $T^{-1}A_p T$ é uma matriz triangular superior (inferior)¹, diz-se que as matrizes A_p são *simultaneamente triangularizáveis*. Um sistema comutado simultaneamente triangularizável possui uma FLQC, como afirma o seguinte teorema.

Teorema 1.2.3 [25, 39] *Seja \mathbb{X} um sistema comutado cujo banco de comutação está associado a um conjunto de matrizes estáveis e simultaneamente triangularizáveis $\{A_p, p \in \mathcal{P}\} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$. Então, o sistema \mathbb{X} possui uma FLQC.*

¹Como é sabido, toda a matriz real é triangularizável por uma transformação de semelhança complexa (basta tomar uma transformação que a reduza à sua forma canónica de Jordan complexa), mas nem sempre é triangularizável através de uma transformação de semelhança real, daí se considerar a triangularização simultânea por matrizes complexas.

De facto, se D for uma FLQC para as matrizes $T^{-1}A_pT$, atendendo à Proposição 1.1.12, $\Re(T^{-*}DT^{-1})$ é uma FLQC para as matrizes $A_p, p \in \mathcal{P}$.

1.2.3 Condições suficientes de triangularização simultânea

Uma vez que a triangularização simultânea de matrizes estáveis é uma condição suficiente de existência de FLQC, as condições suficientes de triangularização simultânea fornecem condições suficientes de estabilidade para sistemas comutados.

Um dos resultados mais conhecidos sobre triangularização simultânea diz respeito às famílias de matrizes que comutam duas a duas, [20, 23].

Teorema 1.2.4 *Seja $\mathcal{A} = \{A_p, p \in \mathcal{P}\}$ um conjunto de matrizes em $\mathbb{R}^{n \times n}$ tal que*

$$A_p A_q = A_q A_p, \quad p, q \in \mathcal{P}. \quad (1.2.3)$$

Então, \mathcal{A} constitui um conjunto de matrizes simultaneamente triangularizáveis.

Se as matrizes do conjunto \mathcal{A} , além de comutarem duas a duas, forem matrizes estáveis, então um sistema comutado com um banco de comutação associado a \mathcal{A} possui uma FLQC, [32].

O teorema anterior sugere que determinadas condições satisfeitas pelo comutador de matrizes:

$$[A_p, A_q] := A_p A_q - A_q A_p, \quad p, q \in \mathcal{P}$$

podem determinar a propriedade de triangularização simultânea.

A condição de comutatividade (1.2.3) corresponde ao anulamento da característica do comutador de duas matrizes: se $\text{rank}([A_1, A_2])$ é nula, o comutador é nulo, A_1 e A_2 comutam e, portanto, estas matrizes são simultaneamente triangularizáveis.

Outra condição em termos da característica do comutador é estabelecida no próximo resultado.

Teorema 1.2.5 [23] *Seja $\{A_1, A_2\} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$. Se $\text{rank}([A_1, A_2]) = 1$, então as matrizes A_1 e A_2 são matrizes simultaneamente triangularizáveis.*

Note-se que, dado um conjunto $\mathcal{A} = \{A_p, p \in \mathcal{P}\}$, o anulamento do comutador $([A_i, A_j]), i, j \in \mathcal{P}$, ou seja a comutatividade das matrizes de \mathcal{A} duas a duas, implica que a álgebra de Lie gerada por \mathcal{A} seja solúvel, veja-se Apêndice A. A solubilidade de uma álgebra de Lie gerada por um conjunto de matrizes constitui uma condição suficiente para triangularização simultânea dessas matrizes, ([21], p. 16). Como tal, o Teorema 1.2.4 fica contemplado no teorema que se segue.

Teorema 1.2.6 *Seja $\mathfrak{g} = \{A_p, p \in \mathcal{P}\}_{AL}$ a álgebra de Lie gerada pelas matrizes A_p . Se \mathfrak{g} é solúvel então, as matrizes A_p são simultaneamente triangularizáveis para todo o $p \in \mathcal{P}$.*

Adicionalmente, se as matrizes do conjunto \mathcal{A} forem estáveis, então um sistema comutado com um banco de comutação associado a \mathcal{A} possui uma FLQC, [25].

Capítulo 2

Sistemas comutados definidos em blocos

Como tivemos oportunidade de ver no capítulo anterior, a estabilidade de um sistema comutado é garantida se o mesmo possui uma FLQC. Um dos objectivos deste capítulo é estender o Teorema 1.2.3, que evoca a propriedade de triangularização simultânea, ao caso em que as matrizes dos sistemas invariantes do banco de comutação são simultaneamente triangularizáveis em blocos, estabelecendo condições suficientes de existência de uma FLQC para este tipo de sistema comutado. Outro objectivo é estudar o caso geral definindo condições sobre os blocos das matrizes envolvidas que garantam a existência de uma FLQC. Por último, analisamos a estabilidade de sistemas comutados interconectados em série, em paralelo e por realimentação, recorrendo aos resultados obtidos.

2.1 Sistemas comutados triangulares em blocos

Consideremos as matrizes triangulares inferiores em $r \times r$ -blocos:

$$A_p = \begin{bmatrix} A_{11}^p & & & \\ A_{21}^p & A_{22}^p & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ A_{r1}^p & A_{r2}^p & \dots & A_{rr}^p \end{bmatrix}, \quad (2.1.1)$$

onde, para cada $i = 1, \dots, r$ e para todo o $p \in \mathcal{P}$, os blocos diagonais A_{ii}^p são matrizes quadradas e têm o mesmo tamanho.

Um sistema comutado $\mathbb{X} = (\mathcal{P}, \Sigma_{\mathcal{P}}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}})$ cujo banco de comutação $\Sigma_{\mathcal{P}}$ está associado a um conjunto de matrizes triangulares inferiores (ou superiores) definidas em $r \times r$ -blocos, diz-se um *sistema comutado triangular em $r \times r$ -blocos*.

Prova-se em [9] que, um sistema comutado deste tipo possui uma FLQC se, e só se, cada conjunto de blocos diagonais $\{A_{ii}^p, p \in \mathcal{P}\}$ de (2.1.1) possui uma FLQC. Aqui enunciamos apenas a condição suficiente de existência de FLQC, para a qual apresentamos uma demonstração distinta. Esta demonstração é construtiva e permite, no caso da hipótese do teorema se verificar, identificar um conjunto infinito de FLQCs diagonais em blocos. Este facto permitir-nos-á estabelecer, na próxima secção, uma condição suficiente de existência de FLQC para o caso em que as matrizes poderão não ser triangulares em blocos.

Outra finalidade desta secção é mostrar que, mesmo que as matrizes associadas ao banco do comutação do sistema não sejam triangulares em blocos, mas triangularizáveis por uma transformação de semelhança T de tal forma que se possam tomar conjuntos de blocos diagonais que possuem FLQCs, respectivamente, também é possível garantir a existência de uma FLQC para esse sistema.

Teorema 2.1.1 [4] *Seja $\mathcal{A} = \{A_p, p \in \mathcal{P}\} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ um conjunto de matrizes estáveis, triangulares em $r \times r$ -blocos. Se cada conjunto de blocos diagonais $\{A_{ii}^p, p \in \mathcal{P}\}$, $i = 1, \dots, r$, possui uma FLQC então, o conjunto \mathcal{A} possui uma FLQC, diagonal em blocos.*

Demonstração: Provemos que é possível escolher de forma adequada os escalares $\epsilon_i \in \mathbb{R}^+, i = 1, \dots, r$, tais que $P = \text{diag}(P_1, \epsilon_2 P_2, \dots, \epsilon_r P_r)$ seja uma FLQC para as matrizes $A_p, p \in \mathcal{P}$, isto é,

$$-A_p^T P - P A_p > 0, p \in \mathcal{P}. \quad (2.1.2)$$

Seja $M_p := -A_p^T P - P A_p, p \in \mathcal{P}$. Então, tendo em conta a estrutura triangular em blocos das matrizes A_p e P , obtemos

$$M_p = \begin{bmatrix} Q_1^p & -\epsilon_2 A_{21}^p{}^T P_2 & \dots & -\epsilon_r A_{r1}^p{}^T P_r \\ -\epsilon_2 P_2 A_{21}^p & \epsilon_2 Q_2^p & \dots & -\epsilon_r (A_{r2}^p)^T P_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\epsilon_r P_r A_{r1}^p & -\epsilon_r P_r A_{r2}^p & \dots & \epsilon_r Q_r^p \end{bmatrix},$$

onde $Q_i^p := -A_{ii}^p{}^T P_i - P_i A_{ii}^p > 0$, para $i = 1, 2, \dots, r$.

Consideremos a seguinte sequência de submatrizes de M_p :

$$\begin{aligned} M_p^{(1)} &= Q_1^p \\ M_p^{(2)} &= \begin{bmatrix} M_p^{(1)} & -\epsilon_2 (A_{21}^p)^T P_2 \\ -\epsilon_2 P_2 A_{21}^p & \epsilon_2 Q_2^p \end{bmatrix} \\ &\vdots \\ M_p^{(r-1)} &= \begin{bmatrix} M_p^{(r-2)} & -\epsilon_{r-1} (V_{r-1}^p)^T \\ -\epsilon_{r-1} V_{r-1}^p & \epsilon_{r-1} Q_{r-1}^p \end{bmatrix} \\ M_p^{(r)} &:= M_p, \end{aligned}$$

onde

$$V_{r-1}^p = [P_{r-1} A_{r-11}^p \quad \dots \quad P_{r-1} A_{r-1r-3}^p \quad P_{r-1} A_{r-1r-2}^p].$$

Como $M_p^{(1)} > 0$ então, pelo Teorema B.0.3, $M_p > 0$ se as demais submatrizes principais também são definidas positivas, qualquer que seja $p \in \mathcal{P}$. Isto é, se para $k = 2, \dots, r$,

$$M_p^{(k)} = \begin{bmatrix} M_p^{(k-1)} & -\epsilon_k (V_k^p)^T \\ -\epsilon_k V_k^p & -\epsilon_k Q_k^p \end{bmatrix} > 0, \quad \text{para todo o } p \in \mathcal{P}, \quad (2.1.3)$$

onde $V_k^p = [P_k A_{k1}^p \quad \dots \quad P_k A_{kk-2}^p \quad P_k A_{kk-1}^p]$ e $M_p^{(k-1)}$ é a submatriz de $M_p^{(k)}$ que contém as primeiras $k-1$ linhas de blocos e as primeiras $k-1$ colunas de blocos de M_p . Deste modo, suponhamos que os valores $\epsilon_2, \dots, \epsilon_{k-1}$ são tais que $M_p^{(k-1)} > 0$. Mostremos como escolher ϵ_k tal que (2.1.3) seja satisfeita. Sendo $M_p^{(k-1)}$ invertível então, atendendo ao Teorema B.0.10, para cada $k = 2, \dots, r$, as matrizes $M_p^{(k)}$ são definidas positivas, qualquer que seja o $p \in \mathcal{P}$, se

$$\lambda_{\min} [Q_k^p] > \epsilon_k \lambda_{\max} \left[V_k^p (M_p^{(k-1)})^{-1} (V_k^p)^T \right].$$

Ora, se para $p \in \mathcal{P}$, $V_k^p = 0$ então, ϵ_k pode tomar qualquer valor positivo. Se para $p \in \mathcal{P}$, $V_k^p \neq 0$, então ϵ_k tem que satisfazer:

$$\epsilon_k < \frac{\lambda_{\min} [Q_k^p]}{\lambda_{\max} \left[V_k^p (M_p^{(k-1)})^{-1} (V_k^p)^T \right]}.$$

Em conclusão, $M_p^{(k)} > 0$, para todo o $p \in \mathcal{P}$, se

$$\epsilon_k \in]0, s_k[, \quad k = 2, \dots, r, \quad (2.1.4)$$

onde

$$s_k = \begin{cases} +\infty; & V_k^p = 0, \text{ para todo } p \in \mathcal{P} \\ \min_{\substack{V_k^p \neq 0 \\ p \in \mathcal{P}}} \left[\frac{\lambda_{\min} [Q_k^p]}{\lambda_{\max} \left[V_k^p \left(M_p^{(k-1)} \right)^{-1} (V_k^p)^T \right]} \right]; & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.1.5)$$

■

Observação 2.1.2 *Seja \mathcal{A} um conjunto constituído pelas matrizes triangulares superiores em $r \times r$ -blocos*

$$A_p = \begin{bmatrix} A_{11}^p & A_{12}^p & \dots & A_{1r}^p \\ & A_{22}^p & \dots & A_{2r}^p \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & A_{rr}^p \end{bmatrix},$$

onde os blocos da diagonal satisfazem as condições do Teorema 2.1.1. Usando os mesmos argumentos da prova do teorema citado, facilmente concluímos que a matriz $P = \text{diag}(P_1, \beta_2 P_2, \dots, \beta_r P_r)$ é uma FLQC para as matrizes $A_p, p \in \mathcal{P}$, se,

$$\beta_k \lambda_{\min} [Q_k^p] > \lambda_{\max} \left[\bar{V}_k^p \left(\bar{M}_p^{(k-1)} \right)^{-1} (\bar{V}_k^p)^T \right], \text{ para todo } p,$$

isto é, se

$$\beta_k \in]m_k, +\infty[, \quad k = 2, \dots, r, \quad (2.1.6)$$

com

$$m_k = \begin{cases} 0; & \bar{V}_k^p = 0, \text{ para todo } p \in \mathcal{P} \\ \max_{\substack{\bar{V}_k^p \neq 0 \\ p \in \mathcal{P}}} \left[\frac{\lambda_{\max} \left[\bar{V}_k^p \left(\bar{M}_p^{(k-1)} \right)^{-1} (\bar{V}_k^p)^T \right]}{\lambda_{\min} [Q_k^p]} \right]; & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (2.1.7)$$

onde $\bar{M}_p^{(1)} = Q_1^p$ e

$$\begin{aligned} \bar{M}_p^{(k)} &= \begin{bmatrix} \bar{M}_p^{(k-1)} & -(\bar{V}_k^p)^T \\ -\bar{V}_k^p & \beta_k Q_k^p \end{bmatrix} \\ \bar{V}_k^p &= \left[(A_{1k}^p)^T P_1 \quad \beta_2 (A_{2k}^p)^T P_2 \quad \dots \quad \beta_{k-1} (A_{k-1,k}^p)^T P_{k-1} \right], \end{aligned}$$

para $k = 2, \dots, r$.

Corolário 2.1.3 *Seja $\mathcal{A} = \{A_p, p \in \mathcal{P}\}$ um conjunto de matrizes estáveis em $\mathbb{R}^{n \times n}$, triangulares em $r \times r$ -blocos. Se, para cada $i = 1, \dots, r$, os blocos diagonais A_{ii}^p são simultaneamente triangularizáveis, para todo o $p \in \mathcal{P}$, então o conjunto \mathcal{A} possui uma FLQC.*

Corolário 2.1.4 [4] *Seja $\mathcal{A} = \{A_p, p \in \mathcal{P}\}$ um conjunto de matrizes estáveis em $\mathbb{R}^{n \times n}$. Se as matrizes A_p são simultaneamente triangularizáveis em blocos, por uma transformação de semelhança complexa T , em que para cada conjunto de blocos diagonais das matrizes $T^{-1}A_pT, p \in \mathcal{P}$, existe uma FLQC então, o conjunto \mathcal{A} possui uma FLQC.*

Demonstração: Suponhamos que as matrizes A_p são simultaneamente triangularizáveis em blocos, por uma transformação de semelhança complexa T tal que cada conjunto de blocos diagonais das matrizes $T^{-1}A_pT, p \in \mathcal{P}$ possui uma FLQC. Então, pelo Teorema 2.1.1, existe uma FLQC real P para o conjunto $\{T^{-1}A_pT, p \in \mathcal{P}\}$, ou equivalentemente, T^*PT é uma FLQC complexa para o conjunto $\mathcal{A} = \{A_p, p \in \mathcal{P}\}$. Logo, atendendo à prova da Proposição 1.1.12, $\Re(T^*PT)$ é uma FLQC real para o conjunto \mathcal{A} . ■

Observação 2.1.5 *Notemos que no corolário anterior os blocos podem ser de ordem 1. Nesse caso, as matrizes $A_p, p \in \mathcal{P}$, satisfazem as condições do Teorema 1.2.3 e, portanto, este é um caso especial do Teorema 2.1.1. Se $P_i := p_i = 1, i = 1, \dots, r$ e $A_{ii}^p := a_{ii}^p$, temos*

$$\overline{a_{ii}^p}p_i + p_i a_{ii}^p = 2\Re(a_{ii}^p) < 0,$$

porque os $a_{ii}^p, i = 1, \dots, r$, são os valores próprios das matrizes estáveis $A_p, p \in \mathcal{P}$.

Do Teorema 2.1.1 e dos seus corolários obtém-se o seguinte resultado:

Corolário 2.1.6 [4] *Um sistema comutado \mathbb{X} cujo banco de comutação está associado a um conjunto de matrizes $\mathcal{A} = \{A_p, p \in \mathcal{P}\}$ que satisfaz as condições do Corolário 2.1.3 ou as condições do Corolário 2.1.4, é estável.*

2.2 O caso geral

Nesta secção analisamos a existência de FLQC para o conjunto de matrizes $A_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$, definidas em $r \times r$ -blocos, não necessariamente triangulares em blocos,

$$A_p := [A_{ij}^p]_{i,j=1,\dots,r}^{p \in \mathcal{P}} = \begin{bmatrix} A_{11}^p & A_{12}^p & \dots & A_{1r}^p \\ A_{21}^p & A_{22}^p & \dots & A_{2r}^p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1}^p & A_{r2}^p & \dots & A_{rr}^p \end{bmatrix}, \quad (2.2.1)$$

onde cada conjunto de blocos diagonais $\{A_{ii}^p, p \in \mathcal{P}\}$ possui uma FLQC P_i , isto é,

$$-(A_{ii}^p)^T P_i - P_i A_{ii}^p = Q_i^p > 0, \quad i = 1, \dots, r. \quad (2.2.2)$$

Apresentaremos duas abordagens e faremos uma análise à possível relação entre elas. Na primeira abordagem, recorreremos ao estudo do caso triangular e tomaremos o caso mais geral onde o número de blocos considerado é arbitrário. Na segunda, trataremos, por uma questão de simplicidade, o caso dos sistemas definidos em 2×2 -blocos, utilizando um método alternativo.

2.2.1 Redução ao caso triangular

Consideremos as matrizes (2.2.1) escritas como:

$$A_p = L_p + U_p,$$

onde

$$L_p = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}A_{11}^p & & & \\ A_{21}^p & \frac{1}{2}A_{22}^p & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ A_{r1}^p & A_{r2}^p & \dots & \frac{1}{2}A_{rr}^p \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad U_p = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}A_{11}^p & A_{12}^p & \dots & A_{1r}^p \\ & \frac{1}{2}A_{22}^p & \dots & A_{2r}^p \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & \frac{1}{2}A_{rr}^p \end{bmatrix},$$

para $p \in \mathcal{P}$. Ora (2.2.2) é equivalente a

$$-\frac{1}{2}(A_{ii}^p)^T P_i - P_i \frac{1}{2}A_{ii}^p = \frac{1}{2}Q_i^p > 0,$$

isto é, $P_i, i = 1, \dots, r$, é uma FLQC de cada conjunto de blocos diagonais das matrizes L_p e $U_p, p \in \mathcal{P}$. Logo, tendo em conta a demonstração do Teorema 2.1.1, as matrizes L_p admitem uma FLQC do tipo:

$$\text{diag}(P_1, \epsilon_2 P_2, \dots, \epsilon_r P_r)$$

se

$$\epsilon_i \in]0, s_i[, \quad i = 2, \dots, r, \quad (2.2.3)$$

com

$$s_i = \begin{cases} +\infty; & V_i^p = 0, \text{ para todo o } p \in \mathcal{P} \\ \min_{\substack{V_i^p \neq 0 \\ p \in \mathcal{P}}} \left[\frac{\lambda_{\min} [Q_i^p]}{2\lambda_{\max} \left[V_i^p \left(M_p^{(i-1)} \right)^{-1} (V_i^p)^T \right]} \right]; & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (2.2.4)$$

onde $M_p^{(1)} = \frac{1}{2}Q_1^p$ e

$$\begin{aligned} M_p^{(i)} &= \begin{bmatrix} M_p^{(i-1)} & -\epsilon_i (V_i^p)^T \\ -\epsilon_i V_i^p & \frac{\epsilon_i}{2} Q_i^p \end{bmatrix} \\ V_i^p &= [P_i A_{i1}^p \quad \dots \quad P_i A_{ii-2}^p \quad P_i A_{ii-1}^p], \end{aligned}$$

para $i = 2, \dots, r$. Por sua vez, usando as notações da Observação 2.1.2, as matrizes U_p admitem uma FLQC do tipo:

$$\text{diag}(P_1, \beta_2 P_2, \dots, \beta_r P_r)$$

se

$$\beta_i \in]m_i, +\infty[, \quad i = 2, \dots, r, \quad (2.2.5)$$

com

$$m_i = \begin{cases} 0; & \bar{V}_i^p = 0, \text{ para todo o } p \in \mathcal{P} \\ \max_{\substack{\bar{V}_i^p \neq 0 \\ p \in \mathcal{P}}} \left[\frac{2\lambda_{\max} \left[\bar{V}_i^p \left(\bar{M}_{(i-1)}^p \right)^{-1} (\bar{V}_i^p)^T \right]}{\lambda_{\min} [Q_i^p]} \right]; & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (2.2.6)$$

onde $\bar{M}_p^{(1)} = \frac{1}{2}Q_1^p$ e

$$\begin{aligned} \bar{M}_p^{(i)} &= \begin{bmatrix} \bar{M}_p^{(i-1)} & (\bar{V}_i^p)^T \\ \bar{V}_i^p & \frac{\beta_i}{2} Q_i^p \end{bmatrix} \\ \bar{V}_i^p &= \left[(A_{1i}^p)^T P_1 \quad \beta_2 (A_{2i}^p)^T P_2 \quad \dots \quad \beta_{i-1} (A_{i-1i}^p)^T P_{i-1} \right], \end{aligned}$$

para $i = 2, \dots, r$.

Assim, faz sentido estabelecer o seguinte resultado:

Teorema 2.2.1 *Seja $\mathcal{A} = \{A_p = [A_{ij}^p]_{i,j=1,\dots,r}^{p \in \mathcal{P}}\}$ um conjunto de matrizes em $\mathbb{R}^{n \times n}$. Se cada conjunto de blocos diagonais $\{A_{ii}^p, p \in \mathcal{P}\}$ possui uma FLQC e*

$$m_i < s_i, \quad i = 1, \dots, r,$$

com m_i e s_i definidos com em (2.2.3)-(2.2.4) e (2.2.5)-(2.2.6), respectivamente, então o conjunto \mathcal{A} possui uma FLQC, diagonal em blocos.

Demonstração: Sejam m_i e s_i definidos com em (2.2.3)-(2.2.4) e (2.2.5)-(2.2.6), respectivamente. Se, para $i = 1, \dots, r$, $m_i < s_i$ então

$$]0, s_i[\cap]m_i, +\infty[\neq \emptyset.$$

Seja $\alpha_i \in]0, s_i[\cap]m_i, +\infty[$, para $i = 1, \dots, r$. Então,

$$P = \text{diag}(P_1, \alpha_2 P_2, \dots, \alpha_r P_r)$$

é uma FLQC para as matrizes L_p e $U_p, p \in \mathcal{P}$ e, por conseguinte, P é uma FLQC para as matrizes $A_p, p \in \mathcal{P}$. ■

Observação 2.2.2 *Caso se considere no teorema anterior $\mathcal{P} = \{1\}$, este resultado fornece uma condição suficiente de existência de FLQ diagonal em blocos (e em particular, diagonal) para uma dada matriz A . Outras condições foram também recentemente estabelecidas, por exemplo em [43]. Veja-se de seguida esta situação analisada no caso 2×2 (em que os blocos são escalares). Seja $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ uma matriz definida por*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

A condição de existência de FLQC para os blocos diagonais degenera, neste caso, no seguinte: os elementos diagonais são negativos, isto é, $a, d \in \mathbb{R}^-$.

Tomando $P_1 := p_1 = 1$, $P_2 := p_2 = 1$, $A_{11} := a$, $A_{12} := b$, $A_{21} := c$ e $A_{22} := d$, $V_2 := p_2 c = c$, $\bar{V}_2 := b p_1 = b$, $M^{(1)} = \bar{M}^{(1)} = a$ e $Q_2 = 2d$, as condições do teorema anterior traduzem-se por

$$a^2 d^2 > b^2 c^2 \wedge a < 0 \wedge d < 0, \quad (2.2.7)$$

com $b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ora, $a^2d^2 > b^2c^2$ é equivalente a

$$ad - bc > 0 \wedge ad + bc > 0 \quad (2.2.8)$$

ou

$$ad - bc < 0 \wedge ad + bc < 0. \quad (2.2.9)$$

Mas, $a^2d^2 > b^2c^2$ é equivalente a $ad > |bc|$, porque $ad > 0$. Como $|bc| > bc$ então,

$$ad - bc > 0,$$

isto é, $\det(A) > 0$. Logo, (2.2.9) não se verifica. Assim, (2.2.7) é equivalente a

$$\det(A) > 0 \wedge a < 0 \wedge d < 0 \wedge ad + bc > 0. \quad (2.2.10)$$

No caso de b e c terem o mesmo sinal, a condição anterior reduz-se a

$$\det(A) > 0 \wedge a < 0 \wedge d < 0, \quad (2.2.11)$$

que é uma condição necessária e suficiente para a existência de uma FLQ diagonal para uma matriz 2×2 , [33]. Podemos constatar que, comparando (2.2.10) e (2.2.11), a condição do Teorema 2.2.1 é mais restritiva para o caso 2×2 . No entanto, como adiante se verá, revela-se um resultado útil para matrizes e blocos de ordem superior.

2.2.2 Algoritmo

Com base na demonstração do Teorema 2.2.1, apresentamos o algoritmo que se segue, que permitirá em alguns casos concluir se existe uma FLQC (diagonal em blocos) para conjuntos de matrizes também elas definidas em blocos.

Dados:

- $A_p = [A_{ij}^p]_{i,j=1,\dots,r}$: matrizes estáveis em $\mathbb{R}^{n \times n}$, definidas em $r \times r$ -blocos;
- P_1, P_2, \dots, P_r são FLQCs de $A_{11}^p, A_{22}^p, \dots, A_{rr}^p, p \in \mathcal{P}$, respectivamente.

Objectivo: Determinar o valor dos escalares positivos $\alpha_2, \dots, \alpha_r$ tais que a matriz $P = \text{diag}(P_1, \alpha_2 P_2, \dots, \alpha_r P_r)$ seja uma FLQC das matrizes $A_p, p \in \mathcal{P}$.

Passo de inicialização: $k = 2$, $M_p^{(1)} = \overline{M}_p^{(1)} = -\frac{1}{2}(A_{11}^p)^T P_1 - \frac{1}{2}P_1 A_{11}^p$

1. **Passo 1:** Para todo o $p \in \mathcal{P}$, construir as matrizes

$$\begin{aligned} Q_k^p &= -(A_{kk}^p)^T P_k - P_k A_{kk}^p \\ V_k^p &= [P_k A_{k1}^p \quad \dots \quad P_k A_{kk-2}^p \quad P_k A_{kk-1}^p] \\ \overline{V}_k^p &= \begin{bmatrix} (A_{1k}^p)^T P_1 & \alpha_2 (A_{2k}^p)^T P_2 & \dots & \alpha_{k-1} (A_{k-1k}^p)^T P_{k-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2. **Passo 2:**

2.1 Calcular, para todo o $p \in \mathcal{P}$,

$$\beta_k^p := \frac{2\lambda_{\max} [\overline{V}_k^p (\overline{M}_{(k-1)}^p)^{-1} (\overline{V}_k^p)^T]}{\lambda_{\min} [Q_k^p]};$$

2.2 Calcular:

$$\beta_k := \max_{p \in \mathcal{P}} [\beta_k^p];$$

3. **Passo 3:** Se $V_k^p = 0$, para todo o $p \in \mathcal{P}$, então, escolher qualquer $\alpha_k \in]\beta_k, +\infty[$.
Senão,

3.1 calcular, para todo o $p \in \mathcal{P}$, tal que $V_k^p \neq 0$,

$$\epsilon_k^p := \frac{\lambda_{\min} [Q_k^p]}{2\lambda_{\max} \left[V_k^p \left(M_p^{(k-1)} \right)^{-1} (V_k^p)^T \right]};$$

3.2 calcular

$$\epsilon_k := \min_{\substack{V_k^p \neq 0 \\ p \in \mathcal{P}}} [\epsilon_k^p];$$

3.3 se $\beta_k > \epsilon_k$, parar e escrever “nada se pode concluir sobre a existência de FLQC”.
Senão, escolher um qualquer $\alpha_k \in]\beta_k, \epsilon_k[$.

4. **Passo 4:** Se $k + 1 > r$, efectuar o Passo 7. Caso contrário, efectuar o Passo 5.

5. **Passo 5:** Considerar $k := k + 1$ e construir as matrizes:

$$\begin{aligned} M_p^{(k-1)} &= \begin{bmatrix} M_p^{(k-2)} & -\alpha_{k-1} (V_{k-1}^p)^T \\ -\alpha_{k-1} V_{k-1}^p & \frac{\alpha_{k-1}}{2} Q_{k-1}^p \end{bmatrix} \\ \overline{M}_p^{(k-1)} &= \begin{bmatrix} \overline{M}_p^{(k-2)} & -(\overline{V}_{k-1}^p)^T \\ -\overline{V}_{k-1}^p & \frac{\alpha_{k-1}}{2} Q_{k-1}^p \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

6. **Passo 6:** Voltar ao Passo 1.

7. **Passo 7:** Escrever “As matrizes A_p têm uma FLQC”. Saída:

$$P = \text{diag}(P_1, \alpha_2 P_2, \dots, \alpha_r P_r).$$

Exemplo 2.2.3 Consideremos as matrizes definidas em 2×2 -blocos:

$$A_1 = \left[\begin{array}{cc|c} -20 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \\ \hline 4 & 0 & -16 \end{array} \right] \quad e \quad A_2 = \left[\begin{array}{cc|c} -20 & 0 & -0.1 \\ 5 & -10 & 0.5 \\ \hline 0 & 0.8 & -6 \end{array} \right].$$

Denotemos por $A_{ij}^p, i = 1, 2$, os blocos das matrizes A_1 e A_2 de acordo com o tipo de partição indicada. As matrizes $P_1 = \text{diag}(2, 1)$ e $P_2 = 1$ são FLQCs dos blocos A_{11}^1 e A_{11}^2, A_{22}^1 e A_{22}^2 , respectivamente. Então,

$$\begin{aligned} M_1^{(1)} &= -\frac{1}{2} \left((A_{11}^1)^T P_1 + P_1 A_{11}^1 \right) = \begin{bmatrix} 40 & -1.5 \\ -1.5 & 1 \end{bmatrix} \\ M_2^{(1)} &= -\frac{1}{2} \left((A_{11}^2)^T P_1 + P_1 A_{11}^2 \right) = \begin{bmatrix} 40 & -2.5 \\ -2.5 & 10 \end{bmatrix} \\ V_2^1 &= \left[P_2 A_{21}^1 \right] = \begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad V_2^2 = \left[P_2 A_{21}^2 \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0.8 \end{bmatrix} \\ \bar{V}_2^1 &= \left[(A_{12}^1)^T P_1 \right] = \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \bar{V}_2^2 = \left[(A_{12}^2)^T P_1 \right] = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Além disso,

$$Q_2^1 = - \left((A_{22}^1)^T P_2 + P_2 A_{22}^1 \right) = 32 \quad e \quad Q_2^2 = - \left((A_{22}^2)^T P_2 + P_2 A_{22}^2 \right) = 12.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \epsilon_2^1 &= \frac{\lambda_{\min} [Q_2^1]}{2\lambda_{\max} \left[V_2^1 \left(M_1^{(1)} \right)^{-1} V_2^{1T} \right]} & \beta_2^1 &= \frac{2\lambda_{\max} \left[\bar{V}_2^1 \left(\bar{M}_1^{(1)} \right)^{-1} \bar{V}_2^{1T} \right]}{\lambda_{\min} [Q_2^1]} \\ &= 37.75 & &\approx 1.7119 \\ \epsilon_2^2 &= \frac{\lambda_{\min} [Q_2^2]}{2\lambda_{\max} \left[V_2^2 \left(M_2^{(1)} \right)^{-1} V_2^{2T} \right]} & \beta_2^2 &= \frac{2\lambda_{\max} \left[\bar{V}_2^2 \left(\bar{M}_2^{(1)} \right)^{-1} \bar{V}_2^{2T} \right]}{\lambda_{\min} [Q_2^2]} \\ &\approx 92.2852 & &\approx 0.0042. \end{aligned}$$

Então, $\max \{\beta_2^1, \beta_2^2\} \approx 1.7119 < \min \{\epsilon_2^1, \epsilon_2^2\} = 37.75$. Tomando, $\alpha_2 = 8$,

$$P = \text{diag}(P_1, 8P_2) = \text{diag}(2, 1, 8)$$

é uma FLQC de A_1 e A_2 .

Exemplo 2.2.4 Verifiquemos que as matrizes definidas em 3×3 -blocos

$$A_1 = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 1 & -20 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0.1 & -1 & -5 & -1 \\ 1 & 4 & 0.5 & 1 & -24 \end{bmatrix} \quad e \quad A_2 = \begin{bmatrix} -8 & -1 & -0.4 & 0.4 & 1 \\ -2 & -100 & -0.1 & 0.5 & -1 \\ -1 & 1 & -10 & 1 & -0.5 \\ 0 & 1 & 1 & -7 & -1 \\ 1 & 0.3 & 0.5 & 1 & -150 \end{bmatrix}$$

possuem uma FLQC.

Denotemos por A_{ij}^p , onde $i, j = 1, 2, 3$ e $p = 1, 2$, os blocos das matrizes A_1 e A_2 de acordo com a partição indicada. As matrizes $P_1 = \text{diag}(2, 1)$, $P_2 = \begin{bmatrix} 120 & 2 \\ 2 & 20 \end{bmatrix}$ e $P_3 = 1$ são FLQCs dos blocos A_{11}^1 e A_{11}^2 , A_{22}^1 e A_{22}^2 e, A_{33}^1 e A_{33}^2 , respectivamente. Com o auxílio do algoritmo anterior e do programa MATLAB, vejamos que é possível determinar os escalares α_2, α_3 tais que $P = \text{diag}(P_1, \alpha_2 P_2, \alpha_3 P_3)$ é uma FLQC das matrizes A_1 e A_2 .

Seja $k = 2$. Então,

$$\begin{aligned} M_1^{(1)} &= -\frac{1}{2} \left((A_{11}^1)^T P_1 + P_1 A_{11}^1 \right) = \begin{bmatrix} 12 & -0.5 \\ -0.5 & 20 \end{bmatrix} \\ M_2^{(1)} &= -\frac{1}{2} \left((A_{11}^2)^T P_1 + P_1 A_{11}^2 \right) = \begin{bmatrix} 16 & 2 \\ 2 & 100 \end{bmatrix} \\ V_2^1 &= \begin{bmatrix} P_2 A_{21}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 & -119.8 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad V_2^2 = \begin{bmatrix} P_2 A_{21}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -120 & 122 \\ -2 & 22 \end{bmatrix} \\ \bar{V}_2^1 &= \begin{bmatrix} (A_{12}^1)^T P_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{V}_2^2 = \begin{bmatrix} (A_{12}^2)^T P_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.8 & -0.1 \\ 0.8 & 0.5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sejam

$$\begin{aligned} Q_2^1 &= - \left((A_{22}^1)^T P_2 + P_2 A_{22}^1 \right) = \begin{bmatrix} 484 & -86 \\ -86 & 196 \end{bmatrix} \\ Q_2^2 &= - \left((A_{22}^2)^T P_2 + P_2 A_{22}^2 \right) = \begin{bmatrix} 2396 & -106 \\ -106 & 276 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\epsilon_2^1 &= \frac{\lambda_{\min}[Q_2^1]}{2\lambda_{\max}\left[V_2^1 \left(M_1^{(1)}\right)^{-1} V_2^{1T}\right]} & \beta_2^1 &= \frac{2\lambda_{\max}\left[\bar{V}_2^1 \left(\bar{M}_1^{(1)}\right)^{-1} \bar{V}_2^{1T}\right]}{\lambda_{\min}[Q_2^1]} \\
&\approx 0.0463 & &\approx 0.0022 \\
\epsilon_2^2 &= \frac{\lambda_{\min}[Q_2^2]}{2\lambda_{\max}\left[V_2^2 \left(M_2^{(1)}\right)^{-1} V_2^{2T}\right]} & \beta_2^2 &= \frac{2\lambda_{\max}\left[\bar{V}_2^2 \left(\bar{M}_2^{(1)}\right)^{-1} \bar{V}_2^{2T}\right]}{\lambda_{\min}[Q_2^2]} \\
&\approx 0.1242 & &\approx 0.0005.
\end{aligned}$$

Então, $\max\{\beta_2^1, \beta_2^2\} \approx 0.0022 < \min\{\epsilon_2^1, \epsilon_2^2\} \approx 0.0463$. Tomemos,

$$\alpha_2 = 0.0243.$$

Seja $k = 3$. Então,

$$\begin{aligned}
M_1^{(2)} &= \begin{bmatrix} M_1^{(1)} & -\alpha_2 (V_2^1)^T \\ -\alpha_2 V_2^1 & -\frac{\alpha_2}{2} Q_2^1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 12 & -0.5 & -2.9118 & -0.0485 \\ -0.5 & 20 & 2.9069 & 0 \\ -2.9118 & 2.9069 & 5.8721 & -1.0434 \\ -0.0485 & 0 & -1.0434 & 2.3780 \end{bmatrix} \\
M_2^{(2)} &= \begin{bmatrix} M_2^{(1)} & -\alpha_2 (V_2^1)^T \\ -\alpha_2 V_2^1 & -\frac{\alpha_2}{2} Q_2^1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 16 & 2 & 2.9118 & 0.0485 \\ 2 & 100 & -2.9603 & -0.5338 \\ 2.9118 & -2.9603 & 29.0695 & -1.2860 \\ 0.0485 & -0.5338 & -1.2860 & 3.3486 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{M}_1^{(2)} &= \begin{bmatrix} \bar{M}_1^{(1)} - (\bar{V}_2^1)^T \\ -\bar{V}_2^1 & -\frac{\alpha_2}{2} Q_2^1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 12 & -0.5 & -1 & -1 \\ -0.5 & 20 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 5.8721 & -1.0434 \\ -1 & 0 & -1.0434 & 2.3780 \end{bmatrix} \\
\bar{M}_2^{(2)} &= \begin{bmatrix} \bar{M}_2^{(1)} - (\bar{V}_2^1)^T \\ -\bar{V}_2^1 & -\frac{\alpha_2}{2} Q_2^1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 16 & 2 & 0.8 & -0.8 \\ 2 & 100 & 0.1 & -0.5 \\ 0.8 & 0.1 & 29.0695 & -1.2860 \\ -0.8 & -0.5 & -1.2860 & 3.3486 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$V_3^1 = \begin{bmatrix} P_3 A_{31}^1 & P_3 A_{32}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} \quad V_3^2 = \begin{bmatrix} P_3 A_{31}^2 & P_3 A_{32}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\bar{V}_3^1 &= \begin{bmatrix} (A_{13}^1)^T P_1 & \alpha_2 (A_{23}^1)^T P_2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & -1 & -0.0485 & -0.4853 \end{bmatrix} \\
\bar{V}_3^2 &= \begin{bmatrix} (A_{13}^2)^T P_1 & \alpha_2 (A_{23}^2)^T P_2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1.5044 & -0.5096 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$Q_3^1 = - (A_{33}^1)^T P_3 - P_3 A_{33}^1 = 48 \quad Q_3^2 = - (A_{33}^2)^T P_3 - P_3 A_{33}^2 = 300$$

Assim,

$$\begin{aligned} \epsilon_3^1 &= \frac{\lambda_{\min}[Q_3^1]}{2\lambda_{\max}\left[V_3^1 \left(M_1^{(2)}\right)^{-1} V_3^{1T}\right]} & \beta_3^1 &= \frac{2\lambda_{\max}\left[\bar{V}_3^1 \left(\bar{M}_1^{(2)}\right)^{-1} \bar{V}_3^{1T}\right]}{\lambda_{\min}[Q_3^1]} \\ &\approx 16.9512 & &\approx 0.0069 \\ \epsilon_3^2 &= \frac{\lambda_{\min}[Q_3^2]}{2\lambda_{\max}\left[V_3^2 \left(M_2^{(2)}\right)^{-1} V_3^{2T}\right]} & \beta_3^2 &= \frac{2\lambda_{\max}\left[\bar{V}_3^2 \left(\bar{M}_2^{(2)}\right)^{-1} \bar{V}_3^{2T}\right]}{\lambda_{\min}[Q_3^2]} \\ &\approx 395.9787 & &= 0.0028. \end{aligned}$$

Então, $\max\{\beta_3^1, \beta_3^2\} \approx 0.0069 < \min\{\epsilon_3^1, \epsilon_3^2\} \approx 16.9512$. Tomando $\alpha_3 = 1$, obtemos uma FLQC de A_1 e A_2 :

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.9118 & 0.0485 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0485 & 0.4853 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.2.3 Abordagem alternativa para sistemas definidos em 2×2 -blocos

Na sequência da subsecção anterior, vamos estabelecer outra condição suficiente de existência de uma FLQC, mas para matrizes particionadas em 2×2 -blocos cujos blocos $(2,1)$ são não-nulos. Note-se, caso contrário, as matrizes seriam triangulares em blocos, situação essa que foi analisada na Secção 2.1.

Começemos por estabelecer o seguinte resultado auxiliar.

Lema 2.2.5 *Seja $A = [A_{ij}]_{i,j=1,2}$ uma matriz em $\mathbb{R}^{n \times n}$, com $A_{21} \neq 0$. Se P_1 e P_2 são FLQs de A_{11} e A_{22} , respectivamente, isto é,*

$$A_{11}^T P_1 + P_1 A_{11} = -Q_1 < 0 \quad e \quad A_{22}^T P_2 + P_2 A_{22} = -Q_2 < 0$$

tais que

$$\lambda_{\min}(Q_1) > 4 \|P_1 A_{12}\|_s \|A_{21}^T P_2\|_s \|Q_2^{-1}\|_s \quad (2.2.12)$$

então, existe $\epsilon > 0$ tal que $\text{diag}(P_1, \epsilon P_2)$ é uma FLQ de A .

Demonstração: Sejam P_1 e P_2 são FLQs de A_{11} e A_{22} , respectivamente, tais que

$$A_{11}^T P_1 + P_1 A_{11} = -Q_1 < 0, \quad A_{22}^T P_2 + P_2 A_{22} = -Q_2 < 0$$

e

$$\lambda_{\min}(Q_1) > 2M, \quad (2.2.13)$$

com $M := 2 \|P_1 A_{12}\|_s \|A_{21}^T P_2\|_s \|Q_2^{-1}\|_s$.

Determinemos $\epsilon > 0$ tal que $P = \text{diag}(P_1, \epsilon P_2)$ seja uma FLQ de $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, isto é,

$$-A^T P - P A = \begin{bmatrix} Q_1 & -(P_1 A_{12} - \epsilon A_{21}^T P_2) \\ -(P_1 A_{12} - \epsilon A_{21}^T P_2)^T & \epsilon Q_2 \end{bmatrix} > 0.$$

Para tal ϵ tem que satisfazer a desigualdade

$$\lambda_{\min}(Q_1) > \frac{1}{\epsilon} W(\epsilon), \quad (2.2.14)$$

com $W(\epsilon) := (\epsilon A_{21}^T P_2 + P_1 A_{12}) Q_2^{-1} (\epsilon A_{21}^T P_2 + P_1 A_{12})^T \geq 0$, para todo o $\epsilon > 0$. Por conseguinte, ϵ tem que satisfazer

$$\epsilon \lambda_{\min}(Q_1) > \lambda_{\max}[W(\epsilon)].$$

Mas, $\|W(\epsilon)\|_s > \lambda_{\max}[W(\epsilon)]$ o que significa que, se existir $\epsilon > 0$ tal que

$$\epsilon \lambda_{\min}(Q_1) > \|W(\epsilon)\|_s,$$

então, (2.2.14) é satisfeita. Por outro lado,

$$\|W(\epsilon)\|_s \leq \|P_1 A_{12} + \epsilon A_{21}^T P_2\|_s \|Q_2^{-1}\|_s \|(P_1 A_{12} + \epsilon A_{21}^T P_2)^T\|_s,$$

o que é equivalente a

$$\|W(\epsilon)\|_s \leq \|P_1 A_{12} + \epsilon A_{21}^T P_2\|_s^2 \|Q_2^{-1}\|_s,$$

porque sendo $\|\cdot\|_s$ a norma espectral, temos $\|\cdot\|^T = \|\cdot\|_s$, ([20], p. 309). Logo,

$$\|W(\epsilon)\|_s \leq \left[\epsilon^2 \|A_{21}^T P_2\|_s^2 + 2\epsilon \|A_{21}^T P_2\|_s \|P_1 A_{12}\|_s + \|P_1 A_{12}\|_s^2 \right] \|Q_2^{-1}\|_s.$$

Assim, se ϵ for tal que

$$\epsilon \lambda_{\min}(Q_1) > \left[\epsilon^2 \|A_{21}^T P_2\|_s^2 + 2\epsilon \|A_{21}^T P_2\|_s \|P_1 A_{12}\|_s + \|P_1 A_{12}\|_s^2 \right] \|Q_2^{-1}\|_s \quad (2.2.15)$$

então, (2.2.14) verifica-se. Assim, como por hipótese, $\lambda_{\min}(Q_1) - 2M > 0$, ϵ pode ser tomado no intervalo $]L_1, L_2[$, com

$$L_1 = \frac{\lambda_{\min}(Q_1) - M - \sqrt{[\lambda_{\min}(Q_1) - 2M] \lambda_{\min}(Q_1)}}{2 \|A_{21}^T P_2\|_s^2 \|Q_2^{-1}\|_s}$$

e

$$L_2 = \frac{\lambda_{\min}(Q_1) - M + \sqrt{[\lambda_{\min}(Q_1) - 2M] \lambda_{\min}(Q_1)}}{2 \|A_{21}^T P_2\|_s^2 \|Q_2^{-1}\|_s}.$$

Notemos que, L_1 e L_2 estão bem definidos, já que se verifica (2.2.13) e, além disso, $]L_1, L_2[\subset \mathbb{R}^+$. De facto,

$$L_1 = \frac{\left(\sqrt{\lambda_{\min}(Q_1) - 2M} - \sqrt{\lambda_{\min}(Q_1)}\right)^2}{4 \|A_{21}^T P_2\|_s^2 \|Q_2^{-1}\|_s}$$

$$L_2 = \frac{\left(\sqrt{\lambda_{\min}(Q_1) - 2M} + \sqrt{\lambda_{\min}(Q_1)}\right)^2}{4 \|A_{21}^T P_2\|_s^2 \|Q_2^{-1}\|_s}.$$

■

Estamos agora em condições de mostrar que para um conjunto de matrizes $A_p = [A_{ij}^p]_{i,j=1,2}^{p \in \mathcal{P}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, com $A_{21}^p \neq 0$, para todo o p , é possível determinar uma FLQC se os conjuntos de blocos diagonais

$$\mathcal{B}_i = \{A_{ii}^p, p \in \mathcal{P}\}, \quad i = 1, 2,$$

possuírem FLQCs tais que, para cada p , elas satisfazem uma relação do tipo (2.2.12) e os intervalos $]L_1, L_2[$ considerados para cada p , não forem disjuntos, isto é,

$$\cap_{p \in \mathcal{P}}]L_1^p, L_2^p[\neq \emptyset,$$

com

$$L_1^p = \frac{\lambda_{\min}(Q_1^p) - M^p - \sqrt{(\lambda_{\min}(Q_1^p) - 2M^p) \lambda_{\min}(Q_1^p)}}{2 \|(A_{21}^p)^T P_2\|_s^2 \|(Q_2^p)^{-1}\|_s}$$

$$L_2^p = \frac{\lambda_{\min}(Q_1^p) - M^p + \sqrt{(\lambda_{\min}(Q_1^p) - 2M^p) \lambda_{\min}(Q_1^p)}}{2 \|(A_{21}^p)^T P_2\|_s^2 \|(Q_2^p)^{-1}\|_s}, \quad (2.2.16)$$

onde

$$M^p := 2 \|P_1 A_{12}^p\|_s \|(A_{21}^p)^T P_2\|_s \|(Q_2^p)^{-1}\|_s.$$

Teorema 2.2.6 *Seja $\mathcal{A} = \left\{ A_p = [A_{ij}^p]_{i,j=1,2}^{p \in \mathcal{P}}, A_{21}^p \neq 0, \forall p \right\} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ um conjunto de matrizes 2×2 em blocos, tal que P_1, P_2 são FLQCs de \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 , respectivamente, isto é,*

$$(A_{11}^p)^T P_1 + P_1 A_{11}^p = -Q_1^p < 0 \text{ e } (A_{22}^p)^T P_2 + P_2 A_{22}^p = -Q_2^p < 0.$$

Se, para cada $p \in \mathcal{P}$,

$$\lambda_{\min}(Q_1^p) > 4 \|P_1 A_{12}^p\|_s \left\| A_{21}^{pT} P_2 \right\|_s \left\| (Q_2^p)^{-1} \right\|_s \text{ e } \cap_{p \in \mathcal{P}}]L_1^p, L_2^p[\neq \emptyset$$

então, o conjunto \mathcal{A} possui uma FLQC.

Demonstração: Suponhamos que L_1^p e L_2^p são definidos de acordo com (2.2.16) e que $\cap_{p \in \mathcal{P}}]L_1^p, L_2^p[\neq \emptyset$. Seja $\epsilon \in \cap_{p \in \mathcal{P}}]L_1^p, L_2^p[$. Então, pelo lema anterior, $P = \text{diag}(P_1, \epsilon P_2)$ é uma FLQC para as matrizes $A_p, p \in \mathcal{P}$. ■

Exemplo 2.2.7 *As matrizes*

$$A_1 = \left[\begin{array}{cc|c} -4 & 0 & -2 \\ 1 & -10 & 0 \\ \hline 1 & 4 & -5 \end{array} \right] \text{ e } A_2 = \left[\begin{array}{cc|c} -80 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ \hline 1 & 4 & -5 \end{array} \right]$$

possuem uma FLQC. Consideremos a partição em blocos indicada e representemos cada bloco por $A_{ij}^p, i, j = 1, 2$, respectivamente.

Verifiquemos que as condições do teorema anterior são satisfeitas. Uma FLQC para os blocos A_{11}^1 e A_{11}^2 é $P_1 = \text{diag}(2, 1)$, e $P_2 = 1$ é uma FLQ de $A_{22}^1 = A_{22}^2$. Então,

$$\begin{aligned} Q_1^1 &= \begin{bmatrix} 16 & -1 \\ -1 & 20 \end{bmatrix}; & \lambda_{\min}(Q_1^1) &\approx 15.7639 \\ Q_1^2 &= \begin{bmatrix} 320 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}; & \lambda_{\min}(Q_1^2) &\approx 1.9497 \\ Q_2^1 &= Q_2^2 = 10. \end{aligned}$$

Seja $M^p := 2 \|P_1 A_{12}^p\|_s \left\| A_{21}^{pT} P_2 \right\|_s \left\| (Q_2^p)^{-1} \right\|_s$. Então,

$$M^1 \approx 3.2985, \quad L_1^1 \approx 0.1307, \quad L_2^1 \approx 7.2019, \quad M^2 \approx 0.8246, \quad L_1^2 \approx 0.1058, \quad L_2^2 \approx 0.5560.$$

Como

$$]L_1^1, L_2^1[\cap]L_1^2, L_2^2[=]0.1307, 0.5560[\neq \emptyset$$

e

$$\lambda_{\min}(Q_1^1) > 2M^1 \approx 6.5970; \quad \lambda_{\min}(Q_1^2) > 2M^2 \approx 1.6492$$

então, verificam-se as condições do teorema anterior. Tomando $\epsilon \in]0.1307, 0.5560[$, por exemplo $\epsilon = 0.3$, obtém-se uma FLQC P para A_1 e A_2 dada por:

$$P = \text{diag}(P_1, 0.3P_2) = \text{diag}(2, 1, 0.3).$$

Observações 2.2.8

1. A condição do Teorema 2.2.1 não é satisfeita para as matrizes consideradas no exemplo anterior. De facto, tem-se:

$$\begin{aligned} M_1^{(1)} &= \overline{M}_1^{(1)} = \frac{1}{2}Q_1^1 = \begin{bmatrix} 8 & -0.5 \\ -0.5 & 10 \end{bmatrix} \\ M_2^{(1)} &= \overline{M}_2^{(1)} = \frac{1}{2}Q_1^2 = \begin{bmatrix} 160 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ V_2^1 &= V_2^2 = \begin{bmatrix} P_2 A_{21}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} \\ \overline{V}_2^1 &= \begin{bmatrix} (A_{12}^1)^T P_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \end{bmatrix} \\ \overline{V}_2^2 &= \begin{bmatrix} (A_{12}^2)^T P_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ora, atendendo às expressões (2.2.3)-(2.2.4) e (2.2.5)-(2.2.6), isto é,

$$\begin{aligned} s_2 &= \min_{\substack{V_2^p \neq 0 \\ p \in \mathcal{P}}} \left[\frac{\lambda_{\min}[Q_2^p]}{2\lambda_{\max} \left[V_2^p \left(M_p^{(1)} \right)^{-1} (V_2^p)^T \right]} \right] \approx \min \{1.4040, 0.1537\} = 0.1537 \\ m_2 &= \max_{\substack{\overline{V}_2^p \neq 0 \\ p \in \mathcal{P}}} \left[\frac{2\lambda_{\max} \left[\overline{V}_2^p \left(\overline{M}_{(1)}^p \right)^{-1} (\overline{V}_2^p)^T \right]}{\lambda_{\min}[Q_2^p]} \right] \approx \max \{0.8025, 0.4103\} = 0.8025. \end{aligned}$$

Como $m_2 > s_2$, a condição do teorema referido não se verifica. Isto mostra que, em situações onde não se aplica o Teorema 2.2.1, se consegue usar o teorema anterior com sucesso.

2. O Exemplo 2.2.3 corresponde à situação contrária, isto é, nesse exemplo as matrizes dadas satisfazem as condições do Teorema 2.2.1, mas não satisfazem as do teorema anterior. Na verdade, a matriz A_1 desse exemplo não satisfaz a condição:

$$\lambda_{\min}(Q_1^1) > 4 \left\| P_1 A_{12}^1 \right\|_s \left\| A_{21}^1{}^T P_2 \right\|_s \left\| (Q_2^1)^{-1} \right\|_s,$$

uma vez que

$$\lambda_{\min}(Q_1^1) = \frac{1}{2} \lambda_{\min}(M_1^{(1)}) \approx 1.884$$

e

$$4 \|P_1 A_{12}^1\|_s \|A_{21}^1{}^T P_2\|_s \|(Q_2^1)^{-1}\|_s \approx 2.692.$$

Até este ponto, neste capítulo, estabelecemos condições para a existência de uma FLQC para um conjunto de matrizes definidas em blocos. Como iremos ver na próxima secção, esses resultados são úteis no estudo da estabilidade da interconexão de sistemas comutados.

2.3 Estabilidade de sistemas comutados interconectados

Aqui estudam-se alguns tipos particulares de sistemas comutados obtidos a partir da interconexão em série, em paralelo e por realimentação de outros sistemas comutados estáveis. Ver-se-á que, nas interconexões em série e em paralelo, a estrutura das matrizes que constituem os respectivos bancos de comutação é aquela que as matrizes do Teorema 2.1.1 exibem, enquanto que a interconexão por realimentação conduz a uma estrutura matricial do tipo considerado no Teorema 2.2.1 (para 2×2 -blocos) ou no Teorema 2.2.6.

2.3.1 Interconexão em série e em paralelo

Consideremos os sistemas comutados $\mathbb{X}_1 = (\mathcal{P}_1, \Sigma_{\mathcal{P}_1}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}_1})$ e $\mathbb{X}_2 = (\mathcal{P}_2, \Sigma_{\mathcal{P}_2}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}_2})$, sendo $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ conjuntos de índices finitos e $\Sigma_{\mathcal{P}_i} = \{\Sigma_{p_i}^i, p_i \in \mathcal{P}_i\}$ os respectivos bancos de comutação. O sistema comutado

$$\mathbb{X}_1 \sqcap_S \mathbb{X}_2 = (\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2, \Sigma_{\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2}^{\sqcap_S}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2}),$$

onde $\Sigma_{\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2}^{\sqcap_S} = \{\Sigma_i^i \sqcap_S \Sigma_j^j : (i, j) \in \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2\}$, é designado por *interconexão em série* de \mathbb{X}_1 e \mathbb{X}_2 . Por sua vez, o sistema comutado

$$\mathbb{X}_1 \sqcap_P \mathbb{X}_2 = (\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2, \Sigma_{\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2}^{\sqcap_P}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2}),$$

onde $\Sigma_{\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2}^{\square_P} = \{\Sigma_i^i \square_P \Sigma_j^j : (i, j) \in \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2\}$, é designado por *interconexão em paralelo* de \mathbb{X}_1 e \mathbb{X}_2 . Em cada tipo de interconexão, cada sinal de comutação

$$\begin{array}{ccc} \sigma : & [t_0, +\infty[& \longrightarrow \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2 \\ & t & \longmapsto (\sigma_1(t), \sigma_2(t)) \end{array}$$

dá origem à interconexão em série ou em paralelo de dois sistemas $\Sigma_{\sigma_1}^1$ e $\Sigma_{\sigma_2}^2$, um sistema σ_1 -comutado e o outro σ_2 -comutado, respectivamente.

Sejam $\Sigma_{\sigma_i}^i$ sistemas σ_i -comutados representados por:

$$\Sigma_{\sigma_i}^i \equiv \begin{cases} \dot{x}^i(t) &= A_{\sigma_i}^i x^i(t) + B_{\sigma_i}^i u^i(t) \\ y^i(t) &= C_{\sigma_i}^i x^i(t) \end{cases}, i = 1, 2, \quad (2.3.1)$$

onde $x^i(t) \in (\mathbb{R}^{n_i})^{\mathbb{R}_0^+}$, $u^i(t) \in (\mathbb{R}^{m_i})^{\mathbb{R}_0^+}$, $y^i(t) \in (\mathbb{R}^{p_i})^{\mathbb{R}_0^+}$ e $A_{\sigma_i}^i, B_{\sigma_i}^i$, e $C_{\sigma_i}^i$ são matrizes reais com dimensões adequadas. A interconexão em série e em paralelo dos sistemas σ_1 -comutado e σ_2 -comutado, $\Sigma_{\sigma_1}^1$ e $\Sigma_{\sigma_2}^2$, pode ser representada pelos seguintes diagramas:

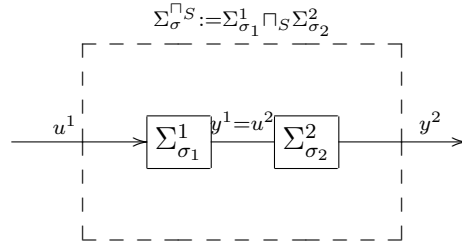


Figura 2.1: Ligação em série

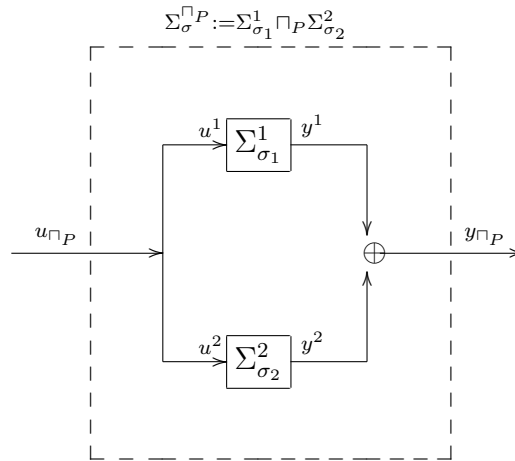


Figura 2.2: Ligação em paralelo

Os sistemas σ -comutados obtidos da interconexão em série e em paralelo dos sistemas $\Sigma_{\sigma_1}^1$ e $\Sigma_{\sigma_2}^2$ são denotados por $\Sigma_{\sigma}^{\square_S}$ e $\Sigma_{\sigma}^{\square_P}$. Os símbolos \square_S e \square_P indicam o tipo de conexão efectuada entre os sistemas. O output do sistema $\Sigma_{\sigma}^{\square_P}$, y_{\square_P} , é a soma dos outputs y^1 e y^2 dos sistemas $\Sigma_{\sigma_1}^1$ e $\Sigma_{\sigma_2}^2$, respectivamente.

Sendo as situações descritas anteriormente facilmente generalizadas para mais de dois sistemas, vamos verificar que as matrizes associadas quer ao banco de comutação $\Sigma_{\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2}^{\square_S}$, quer ao banco de comutação $\Sigma_{\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2}^{\square_P}$ possuem uma estrutura triangular em blocos específica, as quais permitem usar o Teorema 2.1.1 para concluir que os sistemas são estáveis, para qualquer sinal de comutação σ .

Teorema 2.3.1 [4] *Sejam $\mathbb{X}_i = (\mathcal{P}_i, \Sigma_{\mathcal{P}_i}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}_i})$, $i = 1, \dots, r$, sistemas comutados, sendo cada \mathcal{P}_i um conjunto de índices finito. Se cada sistema \mathbb{X}_i possui uma FLQC, então a interconexão em série e em paralelo dos sistemas comutados \mathbb{X}_i , $i = 1, \dots, r$, são sistemas comutados estáveis.*

Demonstração: Seja $\sigma : [t_0, +\infty[\rightarrow \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2 \times \dots \times \mathcal{P}_r$ tal que $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ e considere-se os seguintes sistemas σ_i -comutados

$$\begin{aligned} \Sigma_{\sigma_1}^1 &:= \begin{cases} \dot{x}^1(t) &= A_{\sigma_1(t)}^1 x^1(t) + B_{\sigma_1(t)}^1 u^1(t) \\ y^1(t) &= C_{\sigma_1(t)}^1 x^1(t) \end{cases} \\ &\vdots \\ \Sigma_{\sigma_r}^r &:= \begin{cases} \dot{x}^r(t) &= A_{\sigma_r(t)}^r x^r(t) + B_{\sigma_r(t)}^r u^r(t) \\ y^r(t) &= C_{\sigma_r(t)}^r x^r(t) \end{cases}, \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

com $x^i(t) \in (\mathbb{R}^{n^i})^{\mathbf{R}_0^+}$, $u^i(t) \in (\mathbb{R}^{m^i})^{\mathbf{R}_0^+}$, $y^i(t) \in (\mathbb{R}^{p^i})^{\mathbf{R}_0^+}$, $A_{\sigma_i(t)}^i \in \mathbb{R}^{l^i \times n^i}$, $B_{\sigma_i(t)}^i \in \mathbb{R}^{l^i \times m^i}$ e $C_{\sigma_i(t)}^i \in \mathbb{R}^{p^i \times n^i}$, $i = 1, \dots, r$.

A interconexão em série dos sistemas $\Sigma_{\sigma_1}^1, \Sigma_{\sigma_2}^2, \dots, \Sigma_{\sigma_r}^r$ obtém-se fazendo em (2.3.2) $u^{i+1} = y^i$, para todo o $i = 1, \dots, r-1$, e da qual resulta o sistema σ -comutado

$$\Sigma_{\sigma}^{\square_S} := \begin{cases} \dot{x}^1(t) &= A_{\sigma_1}^1 x^1(t) + B_{\sigma_1}^1 u^1(t) \\ \dot{x}^2(t) &= A_{\sigma_2}^2 x^2(t) + B_{\sigma_2}^2 C_{\sigma_1}^1 x^1(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}^r(t) &= A_{\sigma_r}^r x^r(t) + B_{\sigma_r}^r C_{\sigma_{r-1}}^{r-1} x^{r-1}(t) \\ y^r(t) &= C_{\sigma_r}^r x^r(t) \end{cases}.$$

Considerando $X = \begin{bmatrix} (x^1)^T & (x^2)^T & \dots & (x^r)^T \end{bmatrix}^T$ e $Y = \begin{bmatrix} (y^1)^T & (y^2)^T & \dots & (y^r)^T \end{bmatrix}^T$, as

equações anteriores podem ser escritas como:

$$\begin{cases} \dot{X} &= F_\sigma X + B_\sigma u^1 \\ Y &= C_\sigma X, \end{cases}$$

onde $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ e

$$F_\sigma = \begin{bmatrix} A_{\sigma_1}^1 & & & \\ B_{\sigma_2}^2 C_{\sigma_1}^1 & A_{\sigma_2}^2 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & B_{\sigma_r}^r C_{\sigma_{r-1}}^{r-1} & A_{\sigma_r}^r \end{bmatrix}, \quad B_\sigma = B_{\sigma_1}^1 \quad \text{e} \quad C_\sigma = [0 \quad \dots \quad 0 \quad C_{\sigma_r}^r].$$

Para a interconexão em paralelo dos sistemas $\Sigma_{\sigma_1}^1, \Sigma_{\sigma_2}^2, \dots, \Sigma_{\sigma_r}^r$ obtemos um sistema σ -comutado $\Sigma_\sigma^{\square P}$, representado matricialmente pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \dot{X} &= L_\sigma X + M_\sigma U \\ Y &= N_\sigma X, \end{cases}$$

onde $L_\sigma = \text{diag}(A_{\sigma_1}^1, \dots, A_{\sigma_r}^r)$, $M_\sigma = \text{diag}(B_{\sigma_1}^1, \dots, B_{\sigma_r}^r)$, $N_\sigma = [C_{\sigma_1}^1 \quad \dots \quad C_{\sigma_r}^r]$ e $U = [(u^1)^T, (u^2)^T \quad \dots \quad (u^r)^T]^T$. Notemos que as matrizes

$$F_p = \begin{bmatrix} A_{p_1}^1 & & & \\ B_{p_2}^2 C_{p_1}^1 & A_{p_2}^2 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & B_{p_r}^r C_{p_{r-1}}^{r-1} & A_{p_r}^r \end{bmatrix},$$

e

$$L_p = \text{diag}(A_{p_1}^1, A_{p_2}^2, \dots, A_{p_r}^r)$$

com $p \in \mathcal{P}_1 \times \dots \times \mathcal{P}_r$, possuem uma estrutura triangular tal como no Teorema 2.1.1. Além disso, por hipótese, existe uma FLQC para cada conjunto $\{A_{p_i}^i, p_i \in \mathcal{P}_i\}$. Então, pelo teorema citado, concluímos que existe uma FLQC para os sistemas comutados obtidos de cada tipo interconexão e, portanto, são estáveis. ■

Exemplo 2.3.2 *Seja $\sigma : [t_0, +\infty[\rightarrow \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ tal que $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2 = \{1, 2\}$ e $\sigma(t) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t))$. Consideremos os sistemas σ_1 -comutado e σ_2 -comutado representados como em (2.3.4), tais que para o sistema σ_1 -comutado, $\Sigma_{\sigma_1}^1$,*

$$A_1^1 = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}; \quad A_2^1 = \begin{bmatrix} -8 & -1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}; \quad C_1^1 = [1 \quad 1]; \quad C_2^1 = [0 \quad 1];$$

e para o sistema σ_2 -comutado, $\Sigma_{\sigma_2}^2$,

$$A_1^2 = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}; \quad A_2^2 = \begin{bmatrix} -10 & -1 & -4 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -7 \end{bmatrix}; \quad B_1^2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad B_2^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Notemos que, segundo a Proposição A.0.2, as matrizes A_1^1 e A_2^1 não são simultaneamente triangularizáveis porque a matriz $A_1^1 A_2^1 - A_2^1 A_1^1$ não é nilpotente (os valores próprios de $A_1^1 A_2^1 - A_2^1 A_1^1$ são não-nulos). Por outro lado, $V_1(x) = x^T P_1 x$ e $V_2(x) = x^T P_2 x$ com

$$P_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

são FLQCs para os sistemas $\Sigma_{\sigma_1}^1$ e $\Sigma_{\sigma_2}^2$, respectivamente. Daí que, pelo Teorema 2.1.1, a interconexão em série ou em paralelo destes sistemas é um sistema comutado estável. De facto, usando os argumentos da demonstração desse teorema, é mesmo possível identificar uma FLQC quer para a ligação em série quer para a ligação em paralelo.

Para o sistema comutado obtido por ligação em série uma FLQC pode ser determinada do modo que se segue. As matrizes associadas ao banco de comutação do sistema interconectado em série são dadas por:

$$F_{(p_1, p_2)} = \begin{bmatrix} A_{p_1}^1 & 0 \\ B_{p_2}^2 C_{p_1}^1 & A_{p_2}^2 \end{bmatrix}, \quad (p_1, p_2) \in \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2.$$

Além disso, $V_2^{(p_1, p_2)} = P_2 B_{p_2}^2 C_{p_1}^1 \neq 0$, qualquer que seja $(p_1, p_2) \in \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$. Assim, pelo Teorema 2.1.1 e respectiva prova, $P = \text{diag}(P_1, \epsilon_2 P_2)$ é uma FLQC para as matrizes $F_{(p_1, p_2)}$ se

$$\epsilon_2 \in]0, s_2[\quad e \quad s_2 = \min_{(p_1, p_2) \in \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2} \left[\frac{\lambda_{\min} [Q_2^{(p_1, p_2)}]}{\lambda_{\max} \left[V_2^{(p_1, p_2)} \left(Q_1^{(p_1, p_2)} \right)^{-1} \left(V_2^{(p_1, p_2)} \right)^T \right]} \right],$$

onde $Q_2^{(p_1, p_2)} := -(A_{p_2}^2)^T P_2 + P_2 A_{p_2}^2$ e $\left(Q_1^{(p_1, p_2)} \right)^{-1} := (-A_{p_1}^1)^T P_1 - P_1 A_{p_1}^1)^{-1}$. Calculemos esse valor. Temos,

$$Q_2^{(1,1)} = Q_2^{(2,1)} = \begin{bmatrix} 8 & -4 & 7 \\ -4 & 4 & -4 \\ 7 & -4 & 18 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{\min} [Q_2^{(1,1)}] = \lambda_{\min} [Q_2^{(2,1)}] \approx 1.5195$$

$$Q_2^{(1,2)} = Q_2^{(2,2)} = \begin{bmatrix} 22 & 5 & 24 \\ 5 & 4 & 1 \\ 24 & 1 & 50 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{\min} [Q_2^{(1,2)}] = \lambda_{\min} [Q_2^{(2,2)}] \approx 1.5943$$

Para $W^{(p_1, p_2)} := V^{(p_1, p_2)} \left(Q_1^{(p_1, p_2)} \right)^{-1} \left(V_2^{(p_1, p_2)} \right)^T$ resulta:

$$W^{(1,1)} \approx \begin{bmatrix} 1.6364 & 1.0909 & 2.7273 \\ 1.0909 & 0.7273 & 1.8182 \\ 2.7273 & 1.8182 & 4.5455 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{\max} [W^{(1,1)}] \approx 6.9091$$

$$W^{(2,1)} \approx \begin{bmatrix} 2.6609 & 1.7739 & 4.4348 \\ 1.7739 & 1.1826 & 2.9565 \\ 4.4348 & 2.9565 & 7.3913 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{\max} [W^{(2,1)}] \approx 11.2348$$

$$W^{(1,2)} \approx \begin{bmatrix} 0.1818 & 0.3636 & 0.5455 \\ 0.3636 & 0.7273 & 1.0909 \\ 0.5455 & 1.0909 & 1.6364 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{\max} [W^{(1,2)}] \approx 2.5455$$

$$W^{(2,2)} \approx \begin{bmatrix} 0.2957 & 0.5913 & 0.8870 \\ 0.5913 & 1.1826 & 1.7739 \\ 0.8870 & 1.7739 & 2.6609 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{\max} [W^{(2,2)}] \approx 4.1391.$$

Então, $\epsilon_2 < \min \left\{ \frac{1.5195}{11.2348}, \frac{1.5195}{6.9091}, \frac{1.5943}{2.5455}, \frac{1.5943}{4.1391} \right\} = \frac{1.5195}{11.2348} \approx 0.1352$. Logo podemos tomar, por exemplo, $\epsilon_2 = 0.13$.

2.3.2 Interconexão por realimentação

Consideremos os sistemas comutados $\mathbb{X}_1 = (\mathcal{P}_1, \Sigma_{\mathcal{P}_1}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}_1})$ e $\mathbb{X}_2 = (\mathcal{P}_2, \Sigma_{\mathcal{P}_2}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}_2})$, sendo $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ conjuntos de índices finitos e $\Sigma_{\mathcal{P}_i} = \{\Sigma_{p_i}^i, p_i \in \mathcal{P}_i\}$ os respectivos bancos de comutação. O sistema comutado

$$\mathbb{X}_1 \sqcap_F \mathbb{X}_2 = (\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2, \Sigma_{\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2}^{\sqcap_F}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2}),$$

onde $\Sigma_{\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2}^{\sqcap_F} = \{\Sigma_i^i \sqcap_S \Sigma_j^j : (i, j) \in \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2\}$, é designado por *interconexão por realimentação* de \mathbb{X}_1 e \mathbb{X}_2 . Para cada sinal de comutação

$$\begin{aligned} \sigma : [t_0, +\infty[&\longrightarrow \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2 \\ t &\longmapsto (\sigma_1(t), \sigma_2(t)) \end{aligned}$$

dá origem à interconexão por realimentação de Σ_{σ_1} e Σ_{σ_2} , um sistema σ_1 -comutado e o outro σ_2 -comutado, respectivamente.

Sejam $\Sigma_{\sigma_i}^i$ os sistemas σ_i -comutados representados por:

$$\Sigma_{\sigma_i}^i \equiv \begin{cases} \dot{x}^i(t) &= A_{\sigma_i}^i x^i(t) + B_{\sigma_i}^i u^i(t) \\ y^i(t) &= x^i(t) \end{cases}, \quad i = 1, 2, \quad (2.3.3)$$

onde $x^i(t) \in (\mathbb{R}^{n^i})^{\mathbf{R}_0^+}$, $u^i(t) \in (\mathbb{R}^{m^i})^{\mathbf{R}_0^+}$, $y^i(t) \in (\mathbb{R}^{p^i})^{\mathbf{R}_0^+}$ e $A_{\sigma_i}^i$, $B_{\sigma_i}^i$ são matrizes reais com dimensões adequadas. A interconexão por realimentação dos sistemas $\Sigma_{\sigma_1}^1$ e $\Sigma_{\sigma_2}^2$ pode ser representada segundo o diagrama:

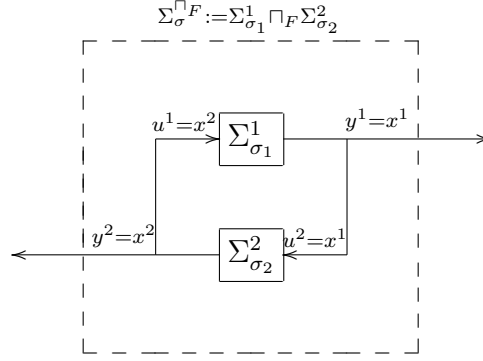


Figura 2.3: Ligação por realimentação

Neste tipo de interconexão, as matrizes associadas ao banco de comutação $\Sigma_{\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2}^{\square F}$ possuem uma estrutura em 2×2 -blocos. Seja $\sigma : [t_0, +\infty[\rightarrow \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ tal que $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2 = \{1, 2\}$ e $\sigma(t) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t))$. Consideremos os sistemas σ_1 -comutado e σ_2 -comutado representados, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} \Sigma_{\sigma_1}^1 &:= \begin{cases} \dot{x}^1(t) &= A_{\sigma_1(t)}^1 x^1(t) + B_{\sigma_1(t)}^1 u^1(t) \\ y^1(t) &= x^1(t) \end{cases} \\ e \\ \Sigma_{\sigma_2}^2 &:= \begin{cases} \dot{x}^2(t) &= A_{\sigma_2(t)}^2 x^2(t) + B_{\sigma_2(t)}^2 u^2(t) \\ y^2(t) &= x^2(t) \end{cases}, \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

com $x^i(t) \in (\mathbb{R}^{n^i})^{\mathbf{R}_0^+}$, $u^i(t) \in (\mathbb{R}^{m^i})^{\mathbf{R}_0^+}$, $y^i(t) \in (\mathbb{R}^{p^i})^{\mathbf{R}_0^+}$, $A_{\sigma_i(t)}^i \in \mathbb{R}^{l^i \times n^i}$ e $B_{\sigma_i(t)}^i \in \mathbb{R}^{l^i \times m^i}$, $i = 1, 2$. Tomando em (2.3.4) $u^1 = x^2$ e $u^2 = x^1$ obtém-se a interconexão por realimentação dos sistemas $\Sigma_{\sigma_1}^1$ e $\Sigma_{\sigma_2}^2$, da qual resulta o sistema descrito pelas seguintes equações:

$$\Sigma_{\sigma}^{\square F} := \begin{cases} \dot{x}^1(t) &= A_{\sigma_1}^1 x^1(t) + B_{\sigma_1}^1 x^2(t) \\ \dot{x}^2(t) &= A_{\sigma_2}^2 x^2(t) + B_{\sigma_2}^2 x^1(t), \end{cases}.$$

Considerando $X = \begin{bmatrix} (x^1)^T & (x^2)^T \end{bmatrix}^T$, podemos escrever matricialmente as equações anteriores como

$$\dot{X} = F_{\sigma} X,$$

onde

$$F_{\sigma} = \begin{bmatrix} A_{\sigma_1}^1 & B_{\sigma_1}^1 \\ B_{\sigma_2}^2 & A_{\sigma_2}^2 \end{bmatrix}. \quad (2.3.5)$$

As matrizes F_p , $p \in \mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$, possuem uma estrutura em 2×2 -blocos, em que neste contexto os blocos não-diagonais são não nulos. Se para estas matrizes as condições do Teorema 2.2.1 forem verificadas então, a estabilidade do sistema $\mathbb{X}_1 \sqcap_F \mathbb{X}_2$ é garantida. Assim, definindo

$$\begin{aligned} L_1^p &= \frac{\lambda_{\min}(Q_1^{p_1}) - M^p - \sqrt{(\lambda_{\min}(Q_1^{p_1}) - 2M^p) \lambda_{\min}(Q_1^{p_1})}}{2 \left\| (B_{p_2}^2)^T P_2 \right\|_s^2 \left\| (Q_2^{p_2})^{-1} \right\|_s} \\ L_2^p &= \frac{\lambda_{\min}(Q_1^{p_1}) - M^p + \sqrt{(\lambda_{\min}(Q_1^{p_1}) - 2M^p) \lambda_{\min}(Q_1^{p_1})}}{2 \left\| (B_{p_2}^2)^T P_2 \right\|_s^2 \left\| (Q_2^{p_2})^{-1} \right\|_s}, \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

com

$$\begin{aligned} Q_i^{p_i} &:= - (A_{p_i}^i)^T P_i - P_i A_{p_i}^i, \quad i = 1, 2, \\ M^p &:= 2 \left\| P_1 B_{p_1}^1 \right\|_s \left\| (B_{p_2}^2)^T P_2 \right\|_s \left\| (Q_2^{p_2})^{-1} \right\|_s, \\ p &:= (p_1, p_2) \in \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2, \end{aligned}$$

do Teorema 2.2.1 obtemos uma condição suficiente de estabilidade interconexão por realimentação de dois sistemas.

Teorema 2.3.3 *Sejam $\mathbb{X}_1 = (\mathcal{P}_1, \Sigma_{\mathcal{P}_1}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}_1})$ e $\mathbb{X}_2 = (\mathcal{P}_2, \Sigma_{\mathcal{P}_2}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}_2})$ dois sistemas comutados. Se \mathbb{X}_1 e \mathbb{X}_2 possuem FLQCs, P_1 e P_2 , respectivamente, tais que*

$$\lambda_{\min}(Q_1^{p_1}) > 4 \left\| P_1 B_{p_1}^1 \right\|_s \left\| (B_{p_2}^2)^T P_2 \right\|_s \left\| (Q_2^{p_2})^{-1} \right\|_s \quad (2.3.7)$$

e

$$\cap_{p \in \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2}]L_1^p, L_2^p[\neq \emptyset$$

então, o sistema $\mathbb{X}_1 \sqcap_F \mathbb{X}_2$ é estável.

Demonstração: Basta notar que, se condição deste teorema for satisfeita então, atendendo ao Teorema 2.2.6, existe uma FLQC para o sistema comutado $\mathbb{X}_1 \sqcap_F \mathbb{X}_2$ e, por conseguinte, este sistema é estável. ■

Exemplo 2.3.4 *Seja $\sigma : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ tal que $\mathcal{P}_1 = \{1, 2\}$, $\mathcal{P}_2 = \{1\}$ e $\sigma(t) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t))$. Consideremos os sistemas σ_1 -comutado e σ_2 -comutado, $\Sigma_{\sigma_1}^1$ e $\Sigma_{\sigma_2}^2$, representados como em (2.3.4). Para o sistema σ_1 -comutado, $\Sigma_{\sigma_1}^1$, assumamos que:*

$$A_1^1 = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -10 \end{bmatrix}; \quad A_2^1 = \begin{bmatrix} -80 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}; \quad B_1^1 = [-2 \ 0]^T; \quad B_2^1 = [0 \ -1]^T.$$

Para o sistema σ_2 -comutado, $\Sigma_{\sigma_2}^2$, assumamos que:

$$A_1^2 = -5; \quad B_1^2 = [1 \ 4].$$

A interconexão por realimentação dos dois sistemas é um sistema σ -comutado cujo banco de comutação está associado, por (2.3.5), ao conjunto de matrizes

$$\mathcal{F} = \left\{ F_p = \begin{bmatrix} A_1^{p_1} & B_1^{p_1} \\ B_2^{p_2} & A_2^{p_2} \end{bmatrix}, p = (p_1, p_2) \in \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2 \right\},$$

onde

$$F_{(1,1)} = \left[\begin{array}{cc|c} -4 & 0 & -2 \\ 1 & -10 & 0 \\ \hline 1 & 4 & -5 \end{array} \right] \quad e \quad F_{(2,1)} = \left[\begin{array}{cc|c} -80 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ \hline 1 & 4 & -5 \end{array} \right].$$

Estas matrizes satisfazem as condições do Teorema 2.2.6, (veja-se o Exemplo 2.2.7). Logo, verificam-se as condições do teorema anterior e, portanto, o sistema comutado $\mathbb{X}_1 \sqcap_F \mathbb{X}_2$, onde $\mathbb{X}_1 = (\mathcal{P}_1, \Sigma_{\mathcal{P}_1}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}_1})$ e $\mathbb{X}_2 = (\mathcal{P}_2, \Sigma_{\mathcal{P}_2}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}_2})$, é estável.

Por fim, é de notar que podemos tentar recorrer à redução ao caso triangular para averiguar se o sistema cujo banco de comutação está associado ao conjunto de matrizes

$$\mathcal{F} = \left\{ F_p = \begin{bmatrix} A_1^{p_1} & B_1^{p_1} \\ B_2^{p_2} & A_2^{p_2} \end{bmatrix}, p = (p_1, p_2) \in \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2 \right\},$$

onde os blocos não-diagonais são não-nulos, possui uma FLQC. Adoptando a mesma notação usada no Teorema 2.2.1, ou seja,

$$Q_i^{p_i} = -(A_i^{p_i})^T P_i - P_i A_i^{p_i},$$

enunciamos no teorema que se segue uma condição suficiente de estabilidade, que é a aplicação directa do Teorema 2.2.1 ao banco de matrizes \mathcal{F} .

Teorema 2.3.5 *Sejam $\mathbb{X}_1 = (\mathcal{P}_1, \Sigma_{\mathcal{P}_1}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}_1})$ e $\mathbb{X}_2 = (\mathcal{P}_2, \Sigma_{\mathcal{P}_2}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}_2})$ dois sistemas comutados tais que \mathbb{X}_1 e \mathbb{X}_2 possuem FLQCs, P_1 e P_2 , respectivamente, e $m < s$ com*

$$\begin{aligned} s &= \min_{(p_1, p_2) \in \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2} \left[\frac{\lambda_{\min} [Q_2^{p_2}]}{4\lambda_{\max} \left[P_2 B_2^{p_2} (Q_1^{p_1})^{-1} (B_2^{p_2})^T P_2 \right]} \right] \\ m &= \max_{(p_1, p_2) \in \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2} \left[\frac{4\lambda_{\max} \left[(B_1^{p_1})^T P_1 (Q_1^{p_1})^{-1} P_1 B_1^{p_1} \right]}{\lambda_{\min} [Q_2^{p_2}]} \right]. \end{aligned}$$

Então, o sistema $\mathbb{X}_1 \sqcap_F \mathbb{X}_2$ é estável.

Capítulo 3

Sistemas comutados com reset

A generalização do conceito de sistema linear comutado que introduzimos neste capítulo contempla, ao contrário do que até aqui foi considerado, a possibilidade de ocorrerem descontinuidades do estado durante o processo de comutação. Essas descontinuidades do estado que admitimos poderem vir acontecer, são desencadeadas pela aplicação de resets nos instantes de comutação e, que aqui, não conduzem o estado do sistema a zero, como é considerado em [13]. Neste trabalho, aos sistemas comutados com tais características no processo de comutação designamo-los por *sistemas comutados com reset*, como em [15, 16]. Já alguns autores utilizam a designação alternativa de *sistemas comutados com impulsos*, [24, 48, 49].

Neste capítulo concluímos que, um sistema comutado com reset \mathbb{X} é estável se para cada sinal de comutação em \mathcal{S}_P , o correspondente sistema σ -comutado com reset é estável. Quanto à estabilidade de um sistema σ -comutado com reset concluímos que, sob determinadas condições, depende da estabilidade do sistema obtido após a redução da dinâmica do sistema inicial a uma outra sem reset. Alternativamente, o estudo da estabilidade de um sistema comutado com reset poderá recorrer a uma análise directa que consiste em comparar os valores que as FLQs, do respectivo banco de comutação, tomam com aplicação de resets no momento anterior e posterior à comutação.

Na última parte deste capítulo, mostramos que é sempre possível garantir a estabilidade de um sistema comutado desde que lhe seja associado uma família de resets apropriada, seleccionada segundo determinados critérios aqui estabelecidos.

3.1 Conceitos fundamentais

Consideremos um conjunto de índices finito $\mathcal{P} = \{1, \dots, N\}$, um conjunto de sinais de comutação $\mathcal{S}_{\mathcal{P}} = \{\sigma : [t_0, +\infty[\rightarrow \mathcal{P} : \sigma \text{ é seccionalmente constante}\}$, uma família de sistemas lineares invariantes $\Sigma_{\mathcal{P}} = \{\Sigma_p, p \in \mathcal{P}\}$ e uma família de matrizes invertíveis $\mathcal{R} = \{R_{(q,p)} \in \mathbb{R}^{n \times n} : (q,p) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}, q \neq p\}$.

Define-se *sistema comutado com reset* como um quadruplo $\mathbb{X}^R = (\mathcal{P}, \Sigma_{\mathcal{P}}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}}, \mathcal{R})$ que se interpreta do seguinte modo. Cada sinal de comutação $\sigma(\cdot) \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ dá origem a um sistema variante no tempo da forma:

$$\Sigma_{\sigma}^R := \begin{cases} \dot{x}(t) &= A_{\sigma(t)}x(t) + B_{\sigma(t)}u(t) \\ y(t) &= C_{\sigma(t)}x(t) + D_{\sigma(t)}u(t) \end{cases}, \text{ para todo o } t \geq t_0, \quad (3.1.1)$$

tal que $x := x(t_0)$ e em cada instante de comutação, t_k , $k \in \mathbb{N}$, com $t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k < \dots$,

$$x(t_k) = R_{(i_{k-1}, i_k)}x(t_k^-), \quad \sigma(t) = i_k \text{ para } t \in [t_{k-1}, t_k[, \quad (3.1.2)$$

onde $x(t_k^-) := \lim_{t \rightarrow t_k^-} x(t)$ e, para cada k , $R_{(i_{k-1}, i_k)}$ é uma matriz invertível em $\mathbb{R}^{n \times n}$.

O sistema Σ_{σ}^R diz-se ser um *sistema σ -comutado com reset*.

Definição 3.1.1 A reposição do estado num instante de comutação, dada pelas matrizes $R_{(q,p)} \in \mathcal{R}$, com $q, p \in \mathcal{P}$, é designada por *reset*. Às matrizes de \mathcal{R} dá-se o nome de *matrizes de reset*, ou simplesmente, *resets*.

Observações 3.1.2

1. Se, num instante de comutação, a matriz de reset $R_{(q,p)}$ aplicada é diferente da matriz identidade então, nesse instante, a continuidade de $x(t)$ não está garantida;
2. As matrizes de reset $R_{(q,p)}$ são determinadas pelos sistemas lineares invariantes activos antes e depois da comutação; não dependem do instante de comutação.

Seja $\sigma \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ um sinal de comutação. Representemos por \mathcal{R}_{σ} o conjunto das matrizes de reset associadas a um sistema σ -comutado. Então,

$$\mathcal{R}_{\sigma} \subseteq \mathcal{R} = \{R_{(q,p)} \in \mathbb{R}^{n \times n} : (q,p) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}, q \neq p\}$$

e portanto, quando $\mathcal{P} = \{1, \dots, N\}$, o conjunto \mathcal{R}_σ tem quando muito $N(N-1)$ resets. Assim, observe-se que, quando $\mathcal{R}_\sigma = \{I_n\}$, isto é, quando todas as matrizes $R_{(q,p)}$, são a matriz identidade, o sistema Σ_σ^R , definido por (3.1.1) e (3.1.2) é um sistema σ -comutado, tal como se definiu no Capítulo 1.

Daqui em diante, assumimos que $\mathcal{R}_\sigma \neq \{I_n\}$.

Considerando $u \equiv 0$ e a condição inicial $x(t_0) = x_0$, a solução do sistema Σ_σ^R é dada por:

$$x(t) = \Phi(t, t_0; \sigma)x(t_0), \quad t, t_0 \in \mathbb{R}, \quad (3.1.3)$$

onde $\Phi(t, t_0; \sigma)$ denota a matriz de transição de Σ_σ^R e é definida por

$$\Phi(t, t_0; \sigma) = e^{A_{i_m}(t-t_m)} \prod_{k=m}^1 R_{(i_{k-1}, i_k)} e^{A_{i_{k-1}}(t_k - t_{k-1})}, \quad (3.1.4)$$

para $t \in [t_m, t_{m+1}[$. De facto, porque $x(t_k) = R_{c_k}x(t_k^-)$, onde $c_k := (i_{k-1}, i_k)$, tem-se

$$\text{para } t \in [t_0, t_1[, \quad x(t) = e^{A_{i_0}(t-t_0)}x(t_0);$$

$$\begin{aligned} \text{para } t \in [t_1, t_2[, \quad x(t) &= e^{A_{i_1}(t-t_1)}x(t_1) \\ &= e^{A_{i_1}(t-t_1)}R_{c_1}x(t_1^-) \\ &= e^{A_{i_1}(t-t_1)}R_{c_1}e^{A_{i_0}(t_1-t_0)}x(t_0); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{para } t \in [t_2, t_3[, \quad x(t) &= e^{A_{i_2}(t-t_2)}x(t_2) \\ &= e^{A_{i_2}(t-t_2)}R_{c_2}x(t_2^-) \\ &= e^{A_{i_2}(t-t_2)}R_{c_2}e^{A_{i_1}(t_2-t_1)}R_{c_1}e^{A_{i_0}(t_1-t_0)}x(t_0); \end{aligned}$$

\vdots

$$\text{para } t \in [t_m, t_{m+1}[, \quad x(t) = e^{A_{i_m}(t-t_m)} \prod_{k=m}^1 R_{(i_{k-1}, i_k)} e^{A_{i_{k-1}}(t_k - t_{k-1})}x(t_0),$$

onde $\{t_1, \dots, t_m\}$ são os instantes de comutação de σ no intervalo $[t_0, +\infty[$.

Observação 3.1.3 Quando todas as matrizes de reset são a matriz identidade então, a matriz de transição $\Phi(t, t_0; \sigma)$ coincide com a expressão dada em (1.1.6).

Algumas das propriedades da matriz de transição do sistema σ -comutado com reset Σ_σ^R podem ser encontradas em [15].

De acordo com a Definição 1.1.3, o sistema σ -comutado com reset Σ_σ^R , dado por (3.1.1) e (3.1.2), é estável, se existirem constantes positivas γ, λ tais que para algum t_0 e x_0 a solução correspondente satisfaz

$$\|x(t)\| \leq \gamma e^{-\lambda(t-t_0)} \|x_0\|, \quad \text{para todo o } t \geq t_0,$$

isto é, tendo em conta (3.1.3), $\|\Phi(t, t_0; \sigma)\| \leq \gamma e^{-\lambda(t-t_0)}$, para todo o $t \geq t_0$.

Definição 3.1.4 *Um sistema comutado $\mathbb{X}^R = (\mathcal{P}, \Sigma_{\mathcal{P}}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}}, \mathcal{R})$ diz-se estável se para cada $\sigma \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ o correspondente sistema σ -comutado com reset Σ_σ^R é estável.*

3.2 Critérios de estabilidade

Nesta secção, analisamos quando é possível concluir que um sistema comutado com reset \mathbb{X} é estável. Essa análise é efectuada segundo duas abordagens. A primeira consiste em determinar se para cada sinal de comutação $\sigma \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ o correspondente sistema σ -comutado Σ_σ^R é estável. A segunda abordagem consiste em averiguar se o sistema comutado \mathbb{X} possui um conjunto de FLQs com determinadas características.

Uma vez que se pretende estudar a propriedade de estabilidade interna, considere-se em (3.1.1) $u \equiv 0$. Assim, para o sinal de comutação σ , o sistema σ -comutado com reset correspondente é representado por:

$$\Sigma_\sigma^R := \dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t), \quad (3.2.1)$$

e está associado aos instantes de comutação $t_1, \dots, t_{k-1}, t_k, \dots$ tais que $t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots, k \in \mathbb{N}$, onde

$$x(t_k) = R_{(i_{k-1}, i_k)} x(t_k^-), \quad \sigma(t) = i_k \text{ para } t \in [t_{k-1}, t_k[, \quad (3.2.2)$$

onde $R_{(i_{k-1}, i_k)}$, $k \in \mathbb{N}$, é uma matriz invertível em $\mathbb{R}^{n \times n}$.

3.2.1 Redução a uma dinâmica sem reset

Aqui relacionamos as trajectórias do estado de um sistema σ -comutado com reset com a trajectória de um sistema linear variante sem reset, isto é, sem “saltos” no estado.

Este sistema linear variante sem reset é, em certos casos, um sistema σ -comutado (sem reset). Estabelecemos ainda um critério de estabilidade, no qual a estabilidade desse sistema variante é uma das condições suficientes para que o sistema σ -comutado seja estável. A trajectória para essa nova dinâmica será denotada por $\tilde{x}(t)$. Para simplificar a notação, definimos $c_k = (i_{k-1}, i_k), k \in \mathbb{N}$.

Lema 3.2.1 [5] *Seja Σ_σ^R o sistema σ -comutado definido de acordo com (3.2.1) e (3.2.2). O sistema linear variante no tempo*

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}(t)\tilde{x}(t); \quad (3.2.3)$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{A}(t) &= A_{i_0}, \text{ para } t \in [t_0, t_1[\\ \tilde{A}(t) &= \left(\prod_{m=k}^1 R_{c_m} \right)^{-1} A_{i_k} \prod_{m=k}^1 R_{c_m}, \text{ para } t \in [t_k, t_{k+1}[, k \in \mathbb{N} \\ \tilde{x}(t_k) &= \tilde{x}(t_k^-), \end{aligned}$$

é tal que

$$x(t) = \prod_{m=k}^0 R_{c_m} \tilde{x}(t), \text{ para } t \in [t_k, t_{k+1}[, k \in \mathbb{N}_0.$$

Por convenção, $R_{c_0} = I_n$.

Demonstração: Para $t \in [t_0, t_1[$, tem-se $\dot{x}(t) = A_{i_0}x(t)$, o que é equivalente a

$$\dot{\tilde{x}}_0(t) = \tilde{A}(t)\tilde{x}_0(t), \quad \tilde{x}_0(t_0) = x(t_0),$$

com

$$\tilde{x}_0(t) = x(t) \text{ e } \tilde{A}(t) = A_{i_0}. \quad (3.2.4)$$

Para $t \in [t_1, t_2[$, tem-se

$$\dot{x}(t) = A_{i_1}x(t); \quad x(t_1) = R_{c_1}x(t_1^-).$$

Então,

$$R_{c_1}^{-1}\dot{x}(t) = R_{c_1}^{-1}A_{i_1}R_{c_1}R_{c_1}^{-1}x(t); \quad R_{c_1}^{-1}x(t_1) = x(t_1^-). \quad (3.2.5)$$

Mas, por (3.2.4), $x(t_1^-) = \tilde{x}_0(t_1^-)$. Logo,

$$R_{c_1}^{-1}\dot{x}(t) = R_{c_1}^{-1}A_{i_1}R_{c_1}R_{c_1}^{-1}x(t); \quad R_{c_1}^{-1}x(t_1) = \tilde{x}_0(t_1^-). \quad (3.2.6)$$

Tomando

$$\tilde{x}_1(t) = R_{c_1}^{-1}x(t), \quad (3.2.7)$$

e considerando (3.2.6), obtém-se

$$\dot{\tilde{x}}_1(t) = \tilde{A}(t)\tilde{x}_1(t); \quad \tilde{x}_1(t_1) = \tilde{x}_0(t_1^-), \quad (3.2.8)$$

para $t \in [t_1, t_2[$ e $\tilde{A}(t) = R_{c_1}^{-1}A_{i_1}R_{c_1}$.

Para $t \in [t_2, t_3[$,

$$\dot{x}(t) = A_{i_2}x(t); \quad x(t_2) = R_{c_2}x(t_2^-).$$

Assim, por (3.2.7), temos $R_{c_1}\tilde{x}_1(t_2^-) = x(t_2^-)$ e conseqüentemente

$$x(t_2) = R_{c_2}R_{c_1}\tilde{x}_1(t_2^-).$$

Por conseguinte,

$$R_{c_1}^{-1}R_{c_2}^{-1}\dot{x}(t) = R_{c_1}^{-1}R_{c_2}^{-1}A_{i_2}R_{c_2}R_{c_1}R_{c_1}^{-1}R_{c_2}^{-1}x(t); \quad R_{c_1}^{-1}R_{c_2}^{-1}x(t_2) = \tilde{x}_1(t_2^-). \quad (3.2.9)$$

Tomando

$$\tilde{x}_2(t) = R_{c_1}^{-1}R_{c_2}^{-1}x(t),$$

(3.2.9) pode escrever-se como

$$\dot{\tilde{x}}_2(t) = \tilde{A}(t)\tilde{x}_2(t); \quad \tilde{x}_2(t_2) = \tilde{x}_1(t_2^-),$$

para $t \in [t_2, t_3[$ e $\tilde{A}(t) = R_{c_1}^{-1}R_{c_2}^{-1}A_{i_2}R_{c_2}R_{c_1}$.

Continuando o processo anterior, obtém-se, para $t \in [t_k, t_{k+1}[$

$$\dot{\tilde{x}}_k(t) = \tilde{A}(t)\tilde{x}_k(t), \quad (3.2.10)$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{x}_k(t_k) &= \tilde{x}_{k-1}(t_k^-) \\ \tilde{A}(t) &= \left(\prod_{m=1}^k R_{c_m}^{-1} \right) A_{i_k} \prod_{m=k}^1 R_{c_m} \\ \tilde{x}_k(t) &= \left(\prod_{m=1}^k R_{c_m}^{-1} \right) x(t), \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

com $k \in \mathbb{N}$.

Considerando $\tilde{x}(t) = \tilde{x}_k(t)$, para $t \in [t_k, t_{k+1}[$, $k \in \mathbb{N}_0$, as equações (3.2.10) e (3.2.11) podem ser escritas como

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}(t)\tilde{x}(t); \quad (3.2.12)$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{A}(t) &= A_{i_0}, \text{ para } t \in [t_0, t_1[\\ \tilde{A}(t) &= \left(\prod_{m=k}^1 R_{c_m} \right)^{-1} A_{i_k} \prod_{m=k}^1 R_{c_m}, \text{ para } t \in [t_k, t_{k+1}[, k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

e $\tilde{x}(t_k) = \tilde{x}(t_k^-)$. Da terceira equação de (3.2.11), tem-se que

$$x(t) = \prod_{m=k}^0 R_{c_m} \tilde{x}(t), \text{ para } t \in [t_k, t_{k+1}[, k \in \mathbb{N}_0.$$

■

De modo a simplificar algumas das expressões matemáticas envolvidas no lema anterior, usaremos a seguinte notação:

$$\begin{aligned} \overline{R}_{\sigma,0} &:= I_n \\ \overline{R}_{\sigma,k} &:= \prod_{m=k}^1 R_{c_m} \\ &= R_{(i_{k-1}, i_k)} R_{(i_{k-2}, i_{k-1})} \dots R_{(i_0, i_1)}. \end{aligned}$$

Note-se que, na prova anterior associámos ao sistema σ -comutado com reset um sistema variante no tempo com uma dinâmica linear e invariante por pedaços. Essa dinâmica é determinada pelo seguinte o conjunto de matrizes

$$\tilde{\mathcal{A}} = \left\{ A_{i_0}, \overline{R}_{\sigma,1}^{-1} A_{i_1} \overline{R}_{\sigma,1}, \overline{R}_{\sigma,2}^{-1} A_{i_2} \overline{R}_{\sigma,2}, \dots \right\}.$$

Enquanto que o número de matrizes de reset é finito, o conjunto $\tilde{\mathcal{A}}$ pode ser infinito. Neste caso, o sistema variante (3.2.12) não está de acordo com a definição de sistema σ -comutado. No entanto, se o conjunto

$$\Pi_\sigma := \left\{ \overline{R}_{\sigma,k} : t_k \text{ instante de comutação de } \sigma \right\},$$

é finito, então $\tilde{\mathcal{A}}$ também é finito. Pelo que, (3.2.12) pode ser considerado um sistema $\tilde{\sigma}$ -comutado (sem reset), associado à correspondente família finita de sistemas invariantes e a um sinal de comutação $\tilde{\sigma}$ que coordena a comutação entre esses sistemas. De facto, suponhamos que

$$\Pi_\sigma = \left\{ \widehat{R}_l : l \in \mathcal{L} = \{0, \dots, T\} \right\}.$$

Então, $\tilde{x}(t)$ corresponde a uma trajectória de um sistema comutado cujo banco de comutação $\tilde{\mathcal{A}}$ pode ser tomado do seguinte modo:

$$\tilde{\mathcal{A}} = \left\{ \tilde{A}_{(p,l)} = \widehat{R}_l^{-1} A_p \widehat{R}_l : (p, l) \in \mathcal{Q} \right\}$$

para um dado sinal de comutação

$$\tilde{\sigma} : [t_0, +\infty[\rightarrow \mathcal{Q},$$

onde $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P} \times \mathcal{L}$. Mais, este sinal de comutação, $\tilde{\sigma}$, terá instantes de comutação no mesmo conjunto dos instantes de comutação de σ .

Exemplo 3.2.2 *Consideremos o sistema σ -comutado com reset $\Sigma_\sigma^R := \dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t)$ associado ao sinal de comutação σ , com instantes de comutação $t_1 < \dots < t_k < \dots, k \in \mathbb{N}$, e tomando valores em $\mathcal{P} = \{1, 2\}$. Suponhamos que as matrizes de reset são:*

$$R_{(q,p)} = \begin{cases} R, & \text{se } p = 1 \\ R^{-1}, & \text{se } p = 2 \end{cases},$$

sendo q e p os valores que σ toma nos instantes de comutação t_{k-1} e t_k , $k \in \mathbb{N}$, respectivamente. Assim, $R_{(2,1)} = R$ e $R_{(1,2)} = R^{-1}$. Logo, se $\sigma(t) = 1$, para $t \in [t_0, t_1[$ então, $\overline{R}_{\sigma,0} = I_n$, $\overline{R}_{\sigma,1} = R_{(1,2)} = R^{-1}$, $\overline{R}_{\sigma,2} = R_{(2,1)}R_{(1,2)} = RR^{-1} = I_n, \dots$

Então,

$$\{\overline{R}_{\sigma,k} : k \in \mathbb{N}_0\} = \{I, R^{-1}\}$$

é finito e, portanto, o sistema variante no tempo que se obtém do sistema inicial é um sistema σ -comutado (sem reset) cujo banco de comutação está associado ao conjunto de matrizes finito

$$\tilde{\mathcal{A}}_1 = \left\{ A_{i_0}, \overline{R}_{\sigma,1}^{-1} A_{i_1} \overline{R}_{\sigma,1}, \overline{R}_{\sigma,2}^{-1} A_{i_2} \overline{R}_{\sigma,2}, \dots \right\} = \left\{ \tilde{A}_1, \tilde{A}_2 \right\},$$

onde $\tilde{A}_1 = A_1$ e $\tilde{A}_2 = RA_2R^{-1}$. Este sistema está associado ao mesmo sinal de comutação do sistema inicial, σ .

Analogamente, supondo que $\sigma(t) = 2$, para $t \in [t_0, t_1[$ obtém-se um sistema σ -comutado (sem reset) cujo banco de comutação está associado ao conjunto de matrizes finito

$$\tilde{\mathcal{A}}_2 = \left\{ \tilde{A}_1, \tilde{A}_2 \right\}$$

onde $\tilde{A}_1 = R^{-1}A_1R$ e $\tilde{A}_2 = A_2$. Este sistema está associado ao mesmo sinal de comutação do sistema inicial, σ .

Exprime-se no próximo teorema um resultado que estabelece que, quando o sistema variante no tempo sem reset (3.2.12) é estável, o mesmo acontece com o sistema comutado com reset inicial, desde que a sucessão de produtos em norma $(\|\bar{R}_{\sigma,k}\|)_{k \in \mathbb{N}}$, com

$$\begin{aligned} \|\bar{R}_{\sigma,1}\| &= \|R_{c_1}\| \\ \|\bar{R}_{\sigma,2}\| &= \|R_{c_2}R_{c_1}\| \\ &\vdots \\ \|\bar{R}_{\sigma,k}\| &= \|R_{c_k} \dots R_{c_2}R_{c_1}\|, k \in \mathbb{N} \\ &\vdots \end{aligned}$$

seja limitada superiormente, ou equivalentemente, desde que o conjunto dos termos da sucessão $(\|\bar{R}_{\sigma,k}\|)_{k \in \mathbb{N}}$, $\{\|\bar{R}_{\sigma,k}\|, k \in \mathbb{N}\}$, seja limitado superiormente.

Teorema 3.2.3 *Seja $\Sigma_\sigma^R := \dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t)$ um sistema σ -comutado com reset, definido de acordo com (3.2.1) e (3.2.2), para o qual $\{\|\bar{R}_{\sigma,k}\|, k \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto limitado superiormente. Se o sistema variante (3.2.12) é estável, então o sistema Σ_σ^R é estável.*

Demonstração: Sejam $\Sigma_\sigma^R := \dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t)$ um sistema σ -comutado com reset e $t_1 < \dots < t_k < \dots$ os instantes de comutação de $\sigma : [t_0, +\infty[\rightarrow \mathcal{P}$. Suponhamos, ainda, que

$$x(t_k) = R_{c_k}x(t_k^-), \quad k \in \mathbb{N},$$

para determinadas matrizes invertíveis R_{c_k} , com $c_k = (i_{k-1}, i_k)$ e $\sigma(t) = i_k$ para $t \in [t_{k-1}, t_k[, k \in \mathbb{N}$. Pelo Lema 3.2.1,

$$\tilde{x}_k(t) = \tilde{x}(t) \quad \text{e} \quad \sigma(t_k) = \sigma(t), \quad \text{para qualquer } t > t_0,$$

onde $\tilde{x}(t)$ é a trajectória do sistema (3.2.12), isto é, $\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}(t)\tilde{x}(t)$. Então, para qualquer $t > t_0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\tilde{x}(t) = \bar{R}_{\sigma,k}^{-1}x(t).$$

Por conseguinte, para cada $t > 0$,

$$\|x(t)\| \leq \|\bar{R}_{\sigma,k}\| \|\tilde{x}(t)\|, \text{ para algum } k \in \mathbb{N}.$$

Mas, por hipótese, $\{\|\bar{R}_{\sigma,k}\| : k \in \mathbb{N}\}$ é limitado superiormente, logo existe $L > 0$ tal que $\|\bar{R}_{\sigma,k}\| < L$. Consequentemente, $\|x(t)\| \leq L\|\tilde{x}(t)\|$ e, portanto, o sistema σ -comutado com reset Σ_σ^R é estável. ■

Observação 3.2.4 *Adicionalmente, se $\{\|\bar{R}_{\sigma,k}\|^{-1}, k \in \mathbb{N}\}$ for limitado superiormente, então a condição suficiente do teorema é também necessária. Em particular, isto acontece quando o conjunto das matrizes $\bar{R}_{\sigma,k}, k \in \mathbb{N}$, é finito.*

Por outro lado, para determinadas famílias de resets, o conjunto $\{\|\bar{R}_{\sigma,k}\|, k \in \mathbb{N}\}$ é limitado superiormente, não só para um sinal de comutação que se fixe como para qualquer outro.

Exemplo 3.2.5 *Seja $\mathbb{X} = (\mathcal{P}, \Sigma_{\mathcal{P}}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}})$ um sistema comutado cujo banco de comutação está associado às matrizes*

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.05 & 2 \\ -1 & -0.05 \end{bmatrix} \quad e \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0.05 & 1 \\ -2 & -0.05 \end{bmatrix}.$$

Então, o sistema comutado \mathbb{X} é instável, [37]. No entanto, se a este sistema for associada uma família de resets \mathcal{R} constituída pelas matrizes $R_{(2,1)}$ e $R_{(1,2)}$ dadas por

$$R_{(2,1)} = R_{(1,2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

então, o sistema comutado com reset \mathbb{X}^R é estável. Seja $R := R_{(2,1)} = R_{(1,2)}$. Então, $R^{-1} = R$. Mais, $\|\bar{R}_{\sigma,k}\| = R$, pelo que $\{\|\bar{R}_{\sigma,k}\|^{-1}, k \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto limitado superiormente. Por outro lado, qualquer que seja o sinal de comutação em $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ considerado, digamos σ_1 ou σ_2 , os sistemas correspondentes $\Sigma_{\sigma_1}^R$ e $\Sigma_{\sigma_2}^R$ são estáveis. A estabilidade destes sistemas decorre do facto de existir uma FLQC para cada sistema sem reset obtido respectivamente de $\Sigma_{\sigma_1}^R$ e $\Sigma_{\sigma_2}^R$. De facto, se denotarmos por Σ_{σ_1} e Σ_{σ_2} os sistemas sem reset obtidos então, tendo em conta o Exemplo 3.2.2, o banco de comutação do sistema Σ_{σ_1} está associado às matrizes

$$\tilde{A}_1 = A_1 \quad e \quad \tilde{A}_2 = RA_2R^{-1} = \begin{bmatrix} -0.05 & -2 \\ 1 & -0.05 \end{bmatrix}$$

e o banco de comutação do sistema Σ_{σ_2} está associado às matrizes

$$\tilde{A}_1 = R^{-1}A_1R = \begin{bmatrix} -0.05 & -1 \\ 2 & -0.05 \end{bmatrix} \quad e \quad \tilde{A}_2 = A_2.$$

Como, para cada um dos sistemas, os produtos de matrizes $\tilde{A}_1\tilde{A}_2$ e $\tilde{A}_1\tilde{A}_2^{-1}$ não têm valores próprios reais negativos então, pelo Teorema 1.2.1, existe uma FLQC para o sistema Σ_{σ_1} e uma FLQC para o sistema Σ_{σ_2} .

Em suma, verificam-se as condições do Teorema 3.2.3 e, portanto, o sistema \mathbb{X}^R é estável.

O exemplo anterior sugere que pode ser possível obter a estabilidade de um sistema comutado com a aplicação de resets apropriados. Mais à frente, debruçar-nos-emos sobre este assunto indicando como essa escolha pode ser feita, isto é, identificando famílias de matrizes de reset \mathcal{R} com as quais um sistema comutado $\mathbb{X}^R = (\mathcal{P}, \Sigma_{\mathcal{P}}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}}, \mathcal{R})$ é estável. Antes, introduzimos outro critério de estabilidade.

3.2.2 Abordagem directa

É possível estudar a estabilidade de um sistema comutado com reset usando uma abordagem diferente e possivelmente mais vantajosa do que a que vimos na secção anterior. Este critério é proposto em [15] e compara os valores que as FLQs dos sistemas do banco de comutação assumem no instante anterior e posterior à comutação, tendo em conta o reset aplicado nesse instante de comutação. Aqui, esse critério é formulado à luz de um conceito que introduzimos na definição que se segue.

Definição 3.2.6 Sejam $\mathbb{X}^R = (\mathcal{P}, \Sigma_{\mathcal{P}}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}}, \mathcal{R})$ um sistema comutado com reset e $\mathbb{P} = \{P_p, p \in \mathcal{P}\}$ um conjunto de matrizes simétricas e definidas positivas. \mathbb{P} diz-se um conjunto de FLQs \mathcal{R} -contractivo de \mathbb{X}^R se:

$$\text{C1 } A_p^T P_p + P_p A_p < 0$$

$$\text{C2 } R_{(q,p)}^T P_p R_{(q,p)} \leq P_q, \text{ para todo o } p, q \in \mathcal{P},$$

onde $R_{(q,q)} := I_n$.

Teorema 3.2.7 *Se um sistema comutado com reset \mathbb{X}^R possui um conjunto de FLQs \mathcal{R} -contractivo então, o sistema \mathbb{X}^R é estável.*

Demonstração: Suponhamos que $\mathbb{P} = \{P_p, p \in \mathcal{P}\}$ é um conjunto de FLQs \mathcal{R} -contractivo de \mathbb{X}^R . Então, existe uma constante positiva suficiente pequena λ tal que

$$A_p^T P_p + P_p A_p \leq -2\lambda P_p, \quad p \in \mathcal{P}.$$

Seja $\sigma : [t_0, +\infty[\rightarrow \mathcal{P}$ um sinal de comutação com instantes de comutação $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots, k \in \mathbb{N}$, tal que $t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots$ e

$$\sigma(t) = i_k, \quad t \in [t_k, t_{k+1}[, k \in \mathbb{N}_0,$$

Assim, para $t \in [t_k, t_{k+1}[$,

$$\begin{aligned} \dot{V}_{i_k}(x(t)) &= x^T(t) (A_{i_k} P_{i_k} + P_{i_k} A_{i_k}) x(t) \\ &\leq -2\lambda V_{i_k}(x(t)), \end{aligned}$$

para $\lambda \in \mathbb{R}^+$, suficientemente pequeno. Isto é, V_{i_k} é decrescente em $[t_k, t_{k+1}[$ e

$$V_{i_k}(x(t)) \leq V_{i_k}(x(t_k)) e^{-2\lambda(t-t_k)}. \quad (3.2.13)$$

Mas, $V_{i_k}(x(t_k)) = x^T(t_k) P_{i_k} x(t_k)$ e, como $\{P_p, p \in \mathcal{P}\}$ é um conjunto de FLQs \mathcal{R} -contractivo de \mathbb{X}^R , temos que

$$V_{i_k}(x(t_k)) \leq x^T(t_k^-) P_{i_{k-1}} x(t_k^-) = V_{i_{k-1}}(x(t_k^-)). \quad (3.2.14)$$

Atendendo a (3.2.13) e à última desigualdade, obtemos

$$V_{i_k}(x(t)) \leq V_{i_{k-1}}(x(t_k^-)) e^{-2\lambda(t-t_k)}. \quad (3.2.15)$$

Como $x(t_k^-) = x(t_{k-1})$ então, (3.2.15) é equivalente a

$$V_{i_k}(x(t)) \leq V_{i_{k-1}}(x(t_{k-1})) e^{-2\lambda(t-t_k)}, \quad (3.2.16)$$

para $t \in [t_k, t_{k+1}[, k \in \mathbb{N}$.

Procedendo de igual modo para $V_{i_{k-1}}(x(t))$, para $t \in [t_{k-1}, t_k[$, e assim sucessivamente, concluímos que:

$$V_{i_k}(x(t)) \leq V_{i_0}(x(t_0)) e^{-2\lambda(t-t_0)}. \quad (3.2.17)$$

Atendendo ao Teorema B.0.4, temos

$$\lambda_{\min}(P_{i_k}) \|x(t)\|^2 \leq V_{i_k}(x(t)) \quad (3.2.18)$$

e

$$V_{i_0}(x(t_0))e^{-2\lambda(t-t_0)} \leq \lambda_{\max}(P_{i_0}) e^{-2\lambda(t-t_0)} \|x(t_0)\|^2. \quad (3.2.19)$$

Logo, de (3.2.17)-(3.2.19) resulta

$$\lambda_{\min}(P_{i_k}) \|x(t)\|^2 \leq \lambda_{\max}(P_{i_0}) e^{-2\lambda(t-t_0)} \|x(t_0)\|^2.$$

e, portanto,

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P_{i_0})}{\lambda_{\min}(P_{i_k})}} \|x(t_0)\| e^{-\lambda(t-t_0)},$$

para $t \in [t_k, t_{k+1}[$, $k \in \mathbb{N}$. Tomando

$$c = \max \left\{ \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P_q)}{\lambda_{\min}(P_p)}}, p, q \in \mathcal{P} \right\} \quad (3.2.20)$$

obtem-se

$$\|x(t)\| \leq ce^{-\lambda(t-t_0)} \|x(t_0)\|, \quad t \geq t_0.$$

■

Observação 3.2.8 *O valor da constante c pode ser dado como em [15], isto é, por $c = c^*$, sendo:*

$$c^* := \max \left\{ \sqrt{\|P_q\| \|P_p^{-1}\|}, p, q \in \mathcal{P} \right\}.$$

De facto, (3.2.20) é o mesmo que:

$$c = \max \left\{ \sqrt{\lambda_{\max}(P_q) \lambda_{\max}(P_p^{-1})}, p, q \in \mathcal{P} \right\}$$

e tendo em conta que o maior dos valores próprios de uma matriz é menor ou igual ao valor da sua norma, resulta $\lambda_{\max}(P_q) \leq \|P_q\|$ e $\lambda_{\max}(P_p^{-1}) \leq \|P_p^{-1}\|$. Logo $c \leq c^$.*

Observação 3.2.9 *Quando $\mathcal{R} = \{I_n\}$, ou seja, quando não existem resets, dizer que \mathbb{P} é um conjunto de FLQs \mathcal{R} -contractivo de um sistema comutado com reset \mathbb{X}^R , equivale a dizer que o sistema \mathbb{X}^R possui uma FLQC. De facto, quando todas as matrizes de reset são a matriz identidade, a condição C2 da Definição 3.2.6 é equivalente a $P_p \leq P_q$, para todo o $p, q \in \mathcal{P}$, pelo que todas as FLQs para o sistema \mathbb{X}^R coincidem.*

3.3 Obtenção de estabilidade por escolha dos resets

Como já tivemos oportunidade de ver, aquando o Exemplo 3.2.5, a escolha prévia e adequada dos resets a aplicar, pode vir a assegurar a estabilidade de um sistema comutado. Assim, sempre que seja permitido escolher as matrizes de reset, é importante conhecer as formas de fazer essa escolha. A este assunto dedicamos esta secção.

Teorema 3.3.1 *Seja $\mathbb{X}^R = (\mathcal{P}, \Sigma_{\mathcal{P}}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}}, \mathcal{R})$ um sistema comutado com reset, para o qual $\mathbb{P} = \{P_p, p \in \mathcal{P}\}$ é um conjunto de FLQs. Se \mathcal{R} for uma família de matrizes de reset simétricas $R_{(q,p)}$ que satisfazem*

$$0 < \lambda_{\max}(R_{(q,p)}) \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(P_q)}{\lambda_{\max}(P_p)}}, \text{ para todo } p, q \in \mathcal{P}$$

então, o sistema \mathbb{X}^R é estável.

Demonstração: Sejam \mathbb{X}^R um sistema comutado com reset, para o qual

$$\mathcal{R} = \{R_{(q,p)} : R_{(q,p)}^T = R_{(q,p)}, q, p \in \mathcal{P}\}$$

e $\mathbb{P} = \{P_p, p \in \mathcal{P}\}$ é um conjunto de FLQs. Então, a condição C2 da Definição 3.2.6 verifica-se e, portanto,

$$\begin{aligned} \lambda_{\max}(R_{(q,p)}^T P_p R_{(q,p)}) &\leq \lambda_{\max}(R_{(q,p)}^T) \lambda_{\max}(P_p) \lambda_{\max}(R_{(q,p)}) \\ &= \lambda_{\max}^2(R_{(q,p)}) \lambda_{\max}(P_p) \\ &\leq \frac{\lambda_{\min}(P_q)}{\lambda_{\max}(P_p)} \lambda_{\max}(P_p) \\ &= \lambda_{\min}(P_q). \end{aligned}$$

Logo, $R_{(q,p)}^T P_p R_{(q,p)} \leq P_q$, $p, q \in \mathcal{P}$, o que significa que \mathbb{P} é um conjunto de FLQs \mathcal{R} -contractivo de \mathbb{X}^R . Assim, pelo Teorema 3.2.7, conclui-se que \mathbb{X}^R é estável. ■

Corolário 3.3.2 *Seja $\mathbb{X}^R = (\mathcal{P}, \Sigma_{\mathcal{P}}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}}, \mathcal{R})$ um sistema comutado com reset, para o qual $\mathbb{P} = \{P_p, p \in \mathcal{P}\}$ é um conjunto de FLQs. Se \mathcal{R} for uma família de matrizes de reset do tipo*

$$R_{(q,p)} = \alpha_{(q,p)} I_n \quad e \quad 0 < \alpha_{(q,p)} \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(P_q)}{\lambda_{\max}(P_p)}} \quad (3.3.1)$$

então, o sistema \mathbb{X}^R é estável.

Outra possibilidade de seleccionar as matrizes de reset a aplicar decorre das transformações de semelhança que garantem a existência de uma FLQC para o sistema comutado dado.

Comecemos por mostrar que dada uma família de matrizes estáveis e uma matriz simétrica definida positiva qualquer, P , existe um conjunto de matrizes semelhantes às dadas que admite P como FLQC.

Lema 3.3.3 [5] *Seja $\{A_p, p \in \mathcal{P}\} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ um conjunto de matrizes estáveis e $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica e definida positiva. Então, existe um conjunto de matrizes invertíveis $\{W_p, p \in \mathcal{P}\}$ tais que $\bar{A}_p = W_p A_p W_p^{-1}$, para $p \in \mathcal{P}$ e*

$$\bar{A}_p^T P + P \bar{A}_p < 0, \quad p \in \mathcal{P}.$$

Demonstração: Suponhamos que $P = P^T > 0$ e $\{A_p, p \in \mathcal{P}\}$ é um conjunto de matrizes estáveis. Então, existe uma matriz invertível M tal que $P = M^T M$. Por outro lado, como $A_p, p \in \mathcal{P}$, é uma matriz estável, existe $P_p = P_p^T > 0$ tal que

$$A_p^T P_p + P_p A_p < 0, \quad p \in \mathcal{P}.$$

Mas, para cada $p \in \mathcal{P}$, $P_p = M_p^T M_p$, para alguma matriz invertível M_p . Assim,

$$A_p^T M_p^T M_p + M_p^T M_p A_p < 0, \quad p \in \mathcal{P}.$$

Multiplicando a última desigualdade à esquerda por M_p^{-T} e à direita por $(M_p)^{-1}$, resulta

$$M_p^{-T} A_p^T M_p^T + M_p A_p M_p^{-1} < 0, \quad p \in \mathcal{P}.$$

Consequentemente,

$$M^T (M_p^{-T} A_p^T M_p^T + M_p A_p M_p^{-1}) M < 0, \quad p \in \mathcal{P}.$$

Como $I_n = M M^{-1}$, a última desigualdade pode ser escrita como

$$M^T M_p^{-T} A_p^T M_p^T M^{-T} M + M^T M M^{-1} M_p A_p M_p^{-1} M < 0, \quad p \in \mathcal{P},$$

ou seja,

$$M^T M_p^{-T} A_p^T M_p^T M^{-T} P + P M^{-1} M_p A_p M_p^{-1} M < 0, \quad p \in \mathcal{P}.$$

Tomando $W_p := M^{-1}M_p$ e $\bar{A}_p := W_p A_p W_p^{-1}$, tem-se que

$$\bar{A}_p^T P + P \bar{A}_p < 0,$$

qualquer que seja o $p \in \mathcal{P}$. ■

Com o auxílio do lema anterior, estabelecemos outra forma de seleccionar as matrizes de reset adequadas para obter estabilidade de um sistema comutado.

Teorema 3.3.4 [5] *Sejam $\mathbb{X}^R = (\mathcal{P}, \Sigma_{\mathcal{P}}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}}, \mathcal{R})$ um sistema comutado com reset. Sejam $\{A_p, p \in \mathcal{P}\} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ o conjunto de matrizes associado ao banco de comutação $\Sigma_{\mathcal{P}}$ e $\{S_p, p \in \mathcal{P}\} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ um conjunto de matrizes invertíveis tal que existe uma FLQC para o conjunto $\{S_p A_p S_p^{-1}, p \in \mathcal{P}\}$. Se \mathcal{R} for uma família de matrizes de reset do tipo*

$$R_{(q,p)} = S_p^{-1} S_q \quad (3.3.2)$$

então, o sistema \mathbb{X}^R é estável.

Demonstração: Suponhamos que as matrizes $\bar{A}_p = S_p A_p S_p^{-1}, p \in \mathcal{P}$, possuem uma FLQC, digamos P . Então,

$$\bar{A}_p^T P + P \bar{A}_p < 0, \text{ para todo o } p \in \mathcal{P}.$$

Pela Proposição 1.1.8, a condição anterior é equivalente a

$$A_p^T S_p^T P S_p + S_p^T P S_p A_p < 0, \text{ para todo o } p \in \mathcal{P}.$$

Então, $P_p := S_p^T P S_p$ é uma FLQ de $A_p, p \in \mathcal{P}$. Atendendo a (3.3.2), temos

$$\begin{aligned} R_{(q,p)}^T P_p R_{(q,p)} &= S_q^T S_p^{-T} S_p^T P S_p S_p^{-1} S_q \\ &= S_q^T P S_q \\ &= P_q, \text{ para todo o } p, q \in \mathcal{P}. \end{aligned}$$

Logo, \mathbb{P} é um conjunto de FLQs \mathcal{R} -contractivo de \mathbb{X}^R e, portanto, pelo Teorema 3.2.7, o sistema comutado \mathbb{X}^R é estável. ■

Observação 3.3.5 *O teorema anterior providencia um critério fácil de selecção das matrizes de reset adequadas, se identificarmos as matrizes $S_p, p \in \mathcal{P}$, nas condições do teorema anterior. De acordo com o Lema 3.3.3, para cada $p \in \mathcal{P}$, o factor S_p pode ser escolhido como na decomposição de Cholesky de uma qualquer FLQ de $A_p, p \in \mathcal{P}$, respectivamente. Além disso, se for possível identificar matrizes reais invertíveis S_p tais que $S_p A_p S_p^{-1}, p \in \mathcal{P}$, são matrizes triangulares, o reset pode ser tomado como no caso anterior. Um caso em que isto é possível, é quando as matrizes A_p possuem exclusivamente valores próprios reais negativos.*

No exemplo que se segue, ilustramos por aplicação de resets do tipo (3.3.2) como se obtém a estabilidade de um sistema comutado instável.

Exemplo 3.3.6 *Seja $\mathbb{X} = (\mathcal{P}, \Sigma_{\mathcal{P}}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}})$ com $\mathcal{P} = \{1, 2\}$ e $\Sigma_{\mathcal{P}} = \{\Sigma_1, \Sigma_2\}$. Sejam, ainda,*

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.05 & 2 \\ -1 & -0.05 \end{bmatrix} \text{ e } A_2 = \begin{bmatrix} -0.05 & 1 \\ -2 & -0.05 \end{bmatrix}$$

as matrizes dos sistemas Σ_1 e Σ_2 , respectivamente. Como já foi referido no Exemplo 3.2.5, o sistema \mathbb{X} é instável. Mas, aplicando resets da forma sugerida no resultado anterior, é possível transformá-lo num sistema comutado (com reset) estável.

As matrizes $P_1 = \text{diag}(10, 20)$ e $P_2 = \text{diag}(20, 10)$ são FLQs de A_1 e A_2 , respectivamente, as quais admitem a seguinte decomposição de Cholesky:

$$\begin{aligned} P_1 &= S_1^T S_1, \text{ com } S_1 = \text{diag}(\sqrt{10}, 2\sqrt{5}) \\ P_2 &= S_2^T S_2, \text{ com } S_2 = \text{diag}(2\sqrt{5}, \sqrt{10}). \end{aligned}$$

Então, as matrizes $S_1 A_1 S_1^{-1}$ e $S_2 A_2 S_2^{-1}$ possuem uma FLQC, a matriz identidade. Definamos as matrizes de reset como

$$R_{(1,2)} = S_2^{-1} S_1 = \text{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$$

e

$$R_{(2,1)} = S_1^{-1} S_2 = \text{diag}\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Então, pelo teorema anterior, o sistema \mathbb{X}^R é estável.

3.4 Considerações finais

A noção de reset ou reposição do estado de um sistema comutado, assume particular importância no contexto dos sistemas de controlo comutado, onde se destacam os trabalhos [15, 16]. Sem qualquer pretensão de exaustividade sobre estabilização de um sistema de controlo comutado, vamos apresentar as ideias principais desse estudo, analisando-as à luz dos nossos resultados.

Considere-se uma planta Σ (processo a controlar) com dinâmica associada às matrizes (A, B, C, D) , isto é,

$$\begin{cases} \dot{x}_\Sigma &= Ax_\Sigma + Bu \\ y &= Cx_\Sigma + Du \end{cases} \quad (3.4.1)$$

e um banco de controladores $\mathcal{K} = \{K_p, p \in \mathcal{P}\}$, sendo o controlo de Σ efectuado por comutação entre os elementos do banco \mathcal{K} de acordo com uma lei de comutação σ . Este *esquema de controlo comutado*, dá origem a um multicontrolador $C(\sigma)$, variante no tempo, como esquematizado na Figura 3.1

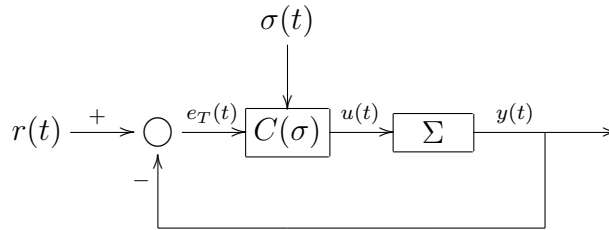


Figura 3.1: Esquema de controlo comutado

onde $u(t)$ é a entrada da planta, $y(t)$ é a sua saída, $r(t)$ é um sinal de referência limitado e $e_T(t) := r(t) - y(t)$. Assumindo que a dinâmica de cada controlador K_p é descrita pelas matrizes (F_p, G_p, H_p, J_p) , $p \in \mathcal{P}$, isto é,

$$\begin{cases} \dot{x}_C &= F_p x_C + G_p e_T \\ u_C &= H_p x_C + J_p e_T \end{cases}, \quad (3.4.2)$$

onde x_C é o estado do controlador, a conexão da planta Σ com o multicontrolador $C(\sigma)$ é um sistema comutado

$$\Psi = (\mathcal{P}, \Sigma_{\mathcal{P}}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}}),$$

cujo estado é $x = \begin{bmatrix} x_\Sigma \\ x_C \end{bmatrix}$, o banco de comutação é constituído por sistemas lineares invariantes em malha fechada $\Sigma_p, p \in \mathcal{P}$, cujas matrizes da dinâmica são:

$$A_p = \begin{bmatrix} A - BJ_p C & BJ_p C \\ -G_p C & F_p \end{bmatrix}, B_p = 0, C_p = C \text{ e } D_p = D. \quad (3.4.3)$$

Se admitirmos reset no estado dos controladores, em cada instante de comutação t_k , associado a matrizes $R_{(q,p)}^C$ então, o sistema em malha fechada Ψ é um sistema comutado com reset, tal que

$$x(t_k) = R_{(q,p)} x(t_k^-), \quad (3.4.4)$$

sendo

$$R_{(q,p)} = \begin{bmatrix} I_{n_P} & 0 \\ 0 & R_{(q,p)}^C \end{bmatrix}, q, p \in \mathcal{P}. \quad (3.4.5)$$

Prova-se em [15] que, considerando determinadas realizações para a planta e para os controladores, se obtém um sistema comutado com reset, cujo banco de comutação está associado a um conjunto de matrizes $A_p, p \in \mathcal{P}$, que verifica a propriedade de triangularização simultânea em blocos, em que um bloco diagonal das matrizes TA_pT^{-1} varia consoante $p \in \mathcal{P}$, mas corresponde a matrizes com FLQC. Portanto o sistema Ψ é estável. Nesse caso, afirma-se em [15] que não há necessidade de submeter o estado dos controladores a resets para obter estabilidade, isto é, pode-se tomar todas as matrizes $R_{(q,p)}^C$ iguais à matriz identidade, sendo apenas necessário escolher adequadamente, a priori, as realizações da planta e dos controladores de acordo com o método aí proposto.

Note-se, no entanto, embora a não necessidade de efectuar reset possa parecer uma vantagem, de facto o processo anterior, baseado na escolha das realizações, é equivalente à utilização de resets tal como descrito no Teorema 3.3.4.

Finalmente, é ainda de evidenciar outro aspecto importante da abordagem realizada por J. P. Hespanha e A. S. Morse, em [15], que merece também ser analisado com detalhe neste trabalho. Está relacionado com a possibilidade da estabilidade do sistema de controlo comutado Ψ poder ser assegurada com matrizes de reset $R_{(q,p)}$ definidas como em (3.4.5), que alteram parcialmente as componentes do estado (só actuando no estado do controlador). A este assunto é dedicado o próximo capítulo, no qual o estudo a realizar seguirá os mesmos traços deste capítulo.

Capítulo 4

Sistemas comutados com reset parcial

No capítulo anterior, considerámos sistemas comutados com reset, ou seja, sistemas comutados nos quais cada componente do estado podia estar sujeita a uma reposição. Na análise efectuada, não se colocou qualquer restrição sobre as matrizes de reset, admitindo-se que todas as componentes do estado pudessem estar sujeitas a um reset no momento de comutação. Porém, como já foi mencionado na Secção 3.4, em certas situações, não existe total liberdade no reset do estado, que está antes sujeito a determinadas restrições. Dito de outra forma, pode ser exigido que não ocorra reposição numa parte das componentes do estado ficando apenas a outra disponível para reset. Deste modo, a reposição do estado é designada por *reset parcial*.

Tal como fizemos no capítulo anterior para o caso dos sistemas comutados com reset total, neste capítulo propomos-nos definir sistema comutado com reset parcial, estabelecer quando é que um sistema comutado com reset parcial é estável e, por último, descrever famílias de resets parciais que, quando associadas a um sistema comutado, permitem obter estabilidade. Ao contrário do que concluímos para a situação mais geral (a de reset total), é de prever que, para esta nova situação, uma selecção apropriada dos resets parciais por si só não seja suficiente para assegurar a estabilidade de um sistema comutado.

4.1 Conceitos fundamentais

Seja $\mathbb{X}^R = (\mathcal{P}, \Sigma_{\mathcal{P}}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}}, \mathcal{R})$ um sistema comutado com reset, onde $\mathcal{P} = \{1, \dots, N\}$ é um conjunto de índices finito, $\Sigma_{\mathcal{P}} = \{\Sigma_p, p \in \mathcal{P}\}$ é uma família de sistemas lineares invariantes, $\mathcal{S}_{\mathcal{P}} = \{\sigma : [t_0, +\infty[\longrightarrow \mathcal{P} : \sigma \text{ é seccionalmente constante}\}$ é um conjunto

de sinais de comutação e $\mathcal{R} = \{R_{(q,p)} \in \mathbb{R}^{n \times n} : (q,p) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}, q \neq p\}$ é uma família de matrizes invertíveis. Se as matrizes $R_{(q,p)}$ do conjunto \mathcal{R} são do tipo:

$$R_{(q,p)} = \begin{bmatrix} I_{n-z} & 0 \\ R_{21}^{(q,p)} & R_{22}^{(q,p)} \end{bmatrix} \quad (4.1.1)$$

diz-se que \mathbb{X}^R é um *sistema comutado com reset parcial* e representa-se por

$$\mathbb{X}^{RP} = (\mathcal{P}, \Sigma_{\mathcal{P}}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}}, \mathcal{R}^P),$$

onde \mathcal{R}^P representará a família de matrizes de reset do tipo (4.1.1).

Definição 4.1.1 A reposição do estado num instante de comutação dada pelas matrizes $R_{(q,p)} \in \mathcal{R}^P$, com $q, p \in \mathcal{P}$, é designada por *reset parcial*. Se n for a dimensão do estado, x , e $n - z$ a dimensão da matriz identidade em $R_{(q,p)}$ diz-se que o *reset parcial* é de ordem z . Às matrizes de \mathcal{R}^P dá-se o nome de *matrizes de reset parcial*, ou simplesmente, *resets parciais*.

Observação 4.1.2 A definição de sistema comutado com reset parcial inclui o caso em que se exige que determinadas combinações lineares das componentes do estado se mantenham constantes e se permite que as outras se alterem nos instantes de comutação. Esta situação traduz-se pela condição:

$$Lx(t_k) = Lx(t_k^-), \quad (4.1.2)$$

onde t_k é um instante de comutação e L é uma matriz com característica de linha plena. Seja U uma matriz invertível tal que $LU = [I \ 0]$. Então (4.1.2) é equivalente a

$$LUU^{-1}x(t_k) = LUU^{-1}x(t_k^-)$$

ou seja,

$$[I \ 0] \tilde{x}(t_k) = [I \ 0] \tilde{x}(t_k^-),$$

com $\tilde{x} = U^{-1}x$. Donde, se $\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{bmatrix}$, resulta

$$\tilde{x}_1(t_k) = \tilde{x}_1(t_k^-).$$

Uma vez que nada se exige em relação a \tilde{x}_2 , pode alterar-se esta parte da variável no instante de comutação através de uma lei do tipo

$$\tilde{x}_2(t_k) = R_{21}^{(q,p)} \tilde{x}_1(t_k^-) + R_{22}^{(q,p)} \tilde{x}_2(t_k^-),$$

com $q, p \in \mathcal{P}$. Isto conduz a

$$\tilde{x}(t_k) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ R_{21}^{(q,p)} & R_{22}^{(q,p)} \end{bmatrix} \tilde{x}(t_k^-),$$

que é a situação da definição, a menos de uma mudança de coordenadas.

4.2 Critério de estabilidade

Sendo um sistema comutado com reset parcial um caso particular de um sistema comutado com reset tal como foi definido no Capítulo 3, é evidente que os critérios de estabilidade estabelecidos nos Teoremas 3.2.3 e 3.2.7, permanecem válidos no estudo da estabilidade desta nova classe de sistemas comutados. Deste modo, é natural que se possa ponderar a utilização desses resultados e respectivas abordagens no estudo da estabilidade de um sistema comutado com reset parcial. No que diz respeito à primeira abordagem, usada na Secção 3.2.1, verificou-se que a sua transposição para o contexto do reset parcial não traz aparentemente qualquer vantagem adicional. Já a abordagem adoptada na Secção 3.2.2, a qual afirma que a estabilidade de um sistema comutado com reset $\mathbb{X}^R = (\mathcal{P}, \Sigma_{\mathcal{P}}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}}, \mathcal{R})$ fica garantida pela existência de um conjunto de FLQs \mathcal{R} -contractivo, Teorema 3.2.7, permite obter alguns resultados adicionais quando se consideram resets parciais. De facto, se a família de resets \mathcal{R} for antes um conjunto de resets parciais, digamos uma família de resets parciais \mathcal{R}^P , a propriedade de \mathcal{R}^P -contractividade impõe sobre as matrizes P_p uma propriedade relacionada com os respectivos complementos de Schur, quando particionadas de modo correspondente.

Comecemos por recordar o conceito de complemento de Schur numa matriz, [12, 51]. Para o efeito, consideremos uma matriz P em $\mathbb{R}^{n \times n}$ particionada em blocos da seguinte forma:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, \quad (4.2.1)$$

sendo P_{22} uma matriz quadrada invertível de ordem z .

Definição 4.2.1 O *complemento de Schur de ordem $n - z$ de P* é a matriz

$$P_{11} - P_{12}P_{22}^{-1}P_{21} \quad (4.2.2)$$

que se denota por $\mathcal{C}_{n-z}(P)$.

Inúmeras propriedades do complemento de Schur de uma matriz podem ser encontradas em [22, 46, 50, 51]. Entretanto, outras propriedades serão estabelecidas ao longo deste capítulo.

Definição 4.2.2 Diz-se que um conjunto $\{P_p, p \in \mathcal{P}\}$ de matrizes simétricas e definidas positivas de ordem n , particionadas como em (4.2.1), tem *complemento de Schur comum de ordem $n - z$* se existir uma matriz simétrica e definida positiva de ordem $n - z$ tal que $\mathcal{C}_{n-z}(P_p) = C$. Abreviadamente, escrever-se-á que $\{P_p, p \in \mathcal{P}\}$ é um conjunto com $(n - z) - CSC$.

Observação 4.2.3 Quando a ordem do complemento de Schur comum é igual a n , então $\mathcal{C}_{n-z}(P_p) = C = P_p$ e, portanto, a existência de um conjunto de FLQs com n -CSC para uma dada família de matrizes $\mathcal{A} = \{A_p, p \in \mathcal{P}\}$ é equivalente à existência de uma FLQC.

A proposição que se segue permite identificar uma transformação de congruência que preserva o complemento de Schur.

Lema 4.2.4 Sejam $G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ 0 & G_{22} \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$ matrizes em $\mathbb{R}^{n \times n}$ cujos blocos G_{11}, G_{22} e P_{22} são invertíveis. Então,

$$\mathcal{C}_{n-z}(GPG^T) = G_{11}\mathcal{C}_{n-z}(P)G_{11}^T.$$

Demonstração: Atendendo às estruturas das matrizes G e P , obtemos:

$$GPG^T = \begin{bmatrix} G_{11}P_{11}G_{11}^T + K & G_{11}P_{12}G_{22}^T + G_{12}P_{22}G_{22}^T \\ G_{22}P_{21}G_{11}^T + G_{22}P_{22}G_{12}^T & G_{22}P_{22}G_{22}^T \end{bmatrix},$$

com $K := G_{12}P_{21}G_{11}^T + G_{11}P_{12}G_{12}^T + G_{12}P_{22}G_{12}^T$.

Sendo G_{22} e P_{22} matrizes invertíveis então,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{n-z}(GPG^T) &= G_{11}P_{11}G_{11}^T + K - (G_{11}P_{12}G_{22}^T + G_{12}P_{22}G_{22}^T)(G_{22}P_{22}G_{22}^T)^{-1} \\ &\quad \times (G_{22}P_{21}G_{11}^T + G_{22}P_{22}G_{12}^T), \end{aligned}$$

o que é equivalente a

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{n-z}(GPG^T) &= G_{11}P_{11}G_{11}^T + K - (G_{11}P_{12}P_{22}^{-1} + G_{12})(P_{21}G_{11}^T + P_{22}G_{12}^T) \\ &= G_{11}P_{11}G_{11}^T + K - G_{11}P_{12}P_{22}^{-1}P_{21}G_{11}^T - K, \end{aligned}$$

pelo que, simplificando a expressão do segundo membro, resulta

$$\mathcal{C}_{n-z}(GPG^T) = G_{11}P_{11}G_{11}^T - G_{11}P_{12}P_{22}^{-1}P_{21}G_{11}^T,$$

isto é,

$$\mathcal{C}_{n-z}(GPG^T) = G_{11}\mathcal{C}_{n-z}(P)G_{11}^T.$$

■

Outra propriedade que importa estabelecer está relacionada com a “monotonia”.

Lema 4.2.5 *Se $P \geq Q > 0$ então, $\mathcal{C}_{n-z}(P) \geq \mathcal{C}_{n-z}(Q) > 0$.*

Demonstração: Se P e Q são matrizes definidas positivas então, pelo Teorema B.0.10, 2., $\mathcal{C}_{n-z}(P) = P_{11} - P_{12}P_{22}^{-1}P_{12}^T > 0$ e $\mathcal{C}_{n-z}(Q) = Q_{11} - Q_{12}Q_{22}^{-1}Q_{12}^T > 0$. Suponhamos que $P \geq Q$. Então, pelo Teorema B.0.9, 2.,

$$Q^{-1} - P^{-1} \geq 0.$$

Mas, pelo Teorema B.0.6, os blocos (1,1) de Q^{-1} e P^{-1} são iguais a $(\mathcal{C}_{n-z}(Q))^{-1}$ e $(\mathcal{C}_{n-z}(P))^{-1}$, respectivamente. Logo,

$$(\mathcal{C}_{n-z}(Q))^{-1} - (\mathcal{C}_{n-z}(P))^{-1} \geq 0,$$

o que novamente pelo Teorema B.0.9, 2., é equivalente a,

$$\mathcal{C}_{n-z}(P) \geq \mathcal{C}_{n-z}(Q).$$

■

Podemos enunciar agora uma condição necessária para que um dado conjunto de FLQs seja \mathcal{R}^P -contractivo.

Proposição 4.2.6 *Seja $\mathbb{X}^{RP} = (\mathcal{P}, \Sigma_{\mathcal{P}}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}}, \mathcal{R}^P)$ um sistema comutado com reset parcial de ordem z . Se \mathbb{P} é um conjunto de FLQs \mathcal{R}^P -contractivo do sistema \mathbb{X}^{RP} então, \mathbb{P} é um conjunto de FLQs com $(n - z)$ -CSC.*

Demonstração: Sejam $\mathbb{X}^{RP} = (\mathcal{P}, \Sigma_{\mathcal{P}}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}}, \mathcal{R}^P)$ um sistema comutado com reset parcial de ordem z e \mathbb{P} um conjunto de FLQs \mathcal{R}^P -contractivo do sistema \mathbb{X}^{RP} . Então as matrizes P_p são FLQs para as matrizes associadas ao banco de comutação $\Sigma_{\mathcal{P}}$, respectivamente, e

$$R_{(q,p)}^T P_p R_{(q,p)} \leq P_q, \text{ para todo o } p, q \in \mathcal{P}.$$

Como, para quaisquer $p, q \in \mathcal{P}$, as matrizes $R_{(q,p)}^T P_p R_{(q,p)}$ e P_q são simétricas e definidas positivas então, pelo Lema 4.2.5,

$$\mathcal{C}_{(n-z)}(R_{(q,p)}^T P_p R_{(q,p)}) \leq \mathcal{C}_{n-z}(P_q), \text{ para todo o } q, p \in \mathcal{P}. \quad (4.2.3)$$

Por outro lado, $R_{(q,p)}^T P_p R_{(q,p)}$ e P_p são matrizes congruentes e a transformação de congruência em causa satisfaz as condições do Lema 4.2.4 com o bloco (1,1) igual à matriz identidade. Logo,

$$\mathcal{C}_{n-z}(R_{(q,p)}^T P_p R_{(q,p)}) = \mathcal{C}_{n-z}(P_p), \text{ para todo o } q, p \in \mathcal{P}.$$

Por conseguinte, (4.2.3) é equivalente a

$$\mathcal{C}_{n-z}(P_p) \leq \mathcal{C}_{n-z}(P_q), \text{ para todo o } q, p \in \mathcal{P}.$$

Deste modo,

$$\mathcal{C}_{n-z}(P_p) = \mathcal{C}_{n-z}(P_q), \text{ para todo o } q, p \in \mathcal{P}.$$

■

Observação 4.2.7 *A recíproca da Proposição 4.2.6 não é válida para qualquer tipo de resets, ou seja, a existência um conjunto de FLQs com o mesmo complemento de Schur*

de ordem $n - z$ não garante que a propriedade de \mathcal{R}^P -contractividade seja satisfeita para qualquer família de resets parciais \mathcal{R}^P . Seja \mathbb{P} o conjunto constituído pelas matrizes

$$P_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad e \quad P_2 = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

O conjunto \mathbb{P} é um conjunto de matrizes simétricas e definidas positivas, com 1-CSC, igual a $\frac{7}{4}$, mas não é um conjunto \mathcal{R}^P -contractivo de um sistema comutado \mathbb{X}^{RP} se uma das matrizes de reset de \mathcal{R}^P for $R_{(2,1)} = I_2$. De facto,

$$R_{(2,1)}^T P_1 R_{(2,1)} - P_2 = P_1 - P_2$$

e

$$P_1 - P_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

não é uma matriz semi-definida negativa.

Tendo em conta a proposição anterior realçamos que, um sistema comutado com reset parcial $\mathbb{X}^{RP} = (\mathcal{P}, \Sigma_{\mathcal{P}}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}}, \mathcal{R}^P)$ não pode admitir um conjunto de FLQs \mathcal{R}^P -contractivo se, à partida, esse sistema não admitir um conjunto de FLQs P_p com complemento de Schur comum, independentemente da família \mathcal{R}^P considerada.

4.2.1 Um caso particular

Se um sistema comutado com reset parcial $\mathbb{X}^{RP} = (\mathcal{P}, \Sigma_{\mathcal{P}}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}}, \mathcal{R}^P)$ de ordem z possui um conjunto de FLQs diagonais em blocos com $(n - z)$ -CSC, o mesmo é dizer que esse sistema possui um conjunto de FLQs diagonais em blocos, com o bloco (1,1) comum de ordem $n - z$. Adicionalmente, se as matrizes de reset parcial que constituem a família \mathcal{R}^P são do tipo $\text{diag}(I_{n-z}, R_{22}^{(q,p)})$ então, o Teorema 3.2.7 pode exprimir-se no resultado que se segue.

Corolário 4.2.8 *Seja $\mathbb{X}^{RP} = (\mathcal{P}, \Sigma_{\mathcal{P}}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}}, \mathcal{R}^P)$ um sistema comutado com reset parcial de ordem z tal que*

$$\mathcal{R}^P = \left\{ \text{diag} \left(I_{n-z}, R_{22}^{(q,p)} \right), q, p \in \mathcal{P} \right\}.$$

Então, o sistema \mathbb{X}^{RP} é estável se existir uma família de matrizes simétricas e definidas positivas $P_p = \text{diag}(P, P_{22}^p)$, sendo a matriz P de ordem $n - z$, que satisfaz as seguintes condições:

$$\text{C1} \quad A_p^T P_p + P_p A_p < 0$$

$$\text{C2} \quad \left(R_{22}^{(q,p)} \right)^T P_{22}^p R_{22}^{(q,p)} \leq P_{22}^q, \text{ para todo } q, p \in \mathcal{P}.$$

Demonstração: Suponhamos que $P_p = \text{diag}(P, P_{22}^p)$, onde P é uma matriz de ordem $n - z$, são FLQs das matrizes $A_p, p \in \mathcal{P}$, respectivamente. Consideremos ainda as matrizes de reset parcial definidas, para todo o $q, p \in \mathcal{P}$, como

$$R_{(q,p)}^P = \text{diag} \left(I_{n-z}, R_{22}^{(q,p)} \right)$$

tais que

$$\left(R_{22}^{(q,p)} \right)^T P_{22}^p R_{22}^{(q,p)} \leq P_{22}^q, \quad q, p \in \mathcal{P}.$$

Então,

$$\text{diag} \left(0, \left(R_{22}^{(q,p)} \right)^T P_{22}^p R_{22}^{(q,p)} \right) \leq \text{diag} (0, P_{22}^q),$$

o que é equivalente a

$$\text{diag} \left(I, \left(R_{22}^{(q,p)} \right)^T \right) \text{diag} (P, P_{22}^p) \text{diag} \left(I, R_{22}^{(q,p)} \right) \leq \text{diag} (P, P_{22}^q),$$

isto é, a

$$\left(R_{(q,p)}^P \right)^T P_p R_{(q,p)}^P \leq P_q, \text{ para todo } q, p \in \mathcal{P}.$$

Logo, segundo o critério de estabilidade - Teorema 3.2.7, o sistema \mathbb{X}^{RP} é estável. ■

É de referir que, embora a existência de um conjunto de FLQs diagonais em blocos com $(n-z)$ -CSC seja, em princípio, uma condição mais exigente que a existência de outro tipo de conjunto de FLQs com $(n-z)$ -CSC, vamos dedicar-nos adiante a este assunto não só por uma questão de simplicidade mas também porque em algumas classes de sistemas faz sentido considerar FLQs diagonais em blocos. Na realidade, a análise da existência de tais conjuntos revela-se ser difícil quer num caso quer noutro.

4.3 Obtenção de estabilidade por escolha dos resets parciais

À semelhança do que foi feito no Capítulo 3 para o caso de reset total, contemplamos agora a possibilidade de escolher as matrizes de reset parcial por forma a obter estabilidade.

Definição 4.3.1 Um sistema $\mathbb{X} = (\mathcal{P}, \Sigma_{\mathcal{P}}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}})$ diz-se um sistema comutado *estabilizável por reset parcial de ordem z* se existe uma família de resets parciais de ordem z

$$\mathcal{R}^P = \left\{ \begin{bmatrix} I_{n-z} & 0 \\ R_{21}^{(q,p)} & R_{22}^{(q,p)} \end{bmatrix}, (q, p) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P} \right\}$$

tal que o sistema comutado com resets parciais $\mathbb{X}^{RP} = (\mathcal{P}, \Sigma_{\mathcal{P}}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}}, \mathcal{R}^P)$ é estável.

Convém referir que, se um sistema comutado é estabilizável por reset parcial de ordem z , também o é para resets de ordem $t > z$, ($t \leq n$). Porém, é de esperar que encontrar uma família de resets parciais de ordem z ou mesmo de ordem $t > z$ com a qual um sistema comutado seja estável, possa não ser possível. Enquanto que, no caso de reset total, a estabilidade de um sistema comutado é imediatamente assegurada com a escolha adequada da família de resets \mathcal{R} , para o caso de reset parcial é natural que tal não suceda. Nesta perspectiva, vamos estabelecer alguns critérios de escolha das matrizes de reset parcial pressupondo que o sistema comutado admite um conjunto de FLQs com $(n - z)$ -CSC.

O lema que se segue juntamente com o Teorema 3.3.4 permitirá estabelecer o primeiro critério de escolha.

Lema 4.3.2 *Um conjunto de matrizes estáveis $\{A_p, p \in \mathcal{P}\} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ possui um conjunto de FLQs com $(n - z)$ -CSC se, e só se, existem matrizes invertíveis do tipo*

$$S_p = \begin{bmatrix} I_{n-z} & 0 \\ S_{21}^p & S_{22}^p \end{bmatrix}$$

tais que o conjunto $\{S_p^{-1}A_pS_p, p \in \mathcal{P}\}$ possui uma FLQC.

Demonstração: Sejam $A_p, p \in \mathcal{P}$, matrizes estáveis e $\{P_p, p \in \mathcal{P}\}$ um seu conjunto de FLQs. Tomem-se as matrizes P_p particionadas de tal modo que os blocos (1,1) sejam de ordem $n - z$:

$$P_p = \begin{bmatrix} P_{11}^p & P_{12}^p \\ P_{12}^{p\,T} & P_{22}^p \end{bmatrix}, p \in \mathcal{P}. \quad (4.3.1)$$

Ora as matrizes P_p podem ser escritas como, [6],

$$P_p = \begin{bmatrix} I_{n-z} & P_{12}^p (P_{22}^p)^{-1} \\ 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{n-z}(P_p) & 0 \\ 0 & P_{22}^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n-z} & 0 \\ (P_{22}^p)^{-1} (P_{12}^p)^T & I_z \end{bmatrix}. \quad (4.3.2)$$

Sendo as matrizes $P_p > 0$ então, pelo Teorema B.0.10, os blocos P_{22}^p são invertíveis e $(P_{22}^p)^{-1} = V_p V_p^T$ para alguma matriz invertível V_p . Assim, substituindo em (4.3.2), P_{22} por $V_p^{-T} V_p^{-1}$, resulta

$$P_p = S_p^T \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{n-z}(P_p) & 0 \\ 0 & I_z \end{bmatrix} S_p, \quad p \in \mathcal{P}, \quad (4.3.3)$$

com

$$S_p := \begin{bmatrix} I_{n-z} & 0 \\ 0 & V_p^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n-z} & 0 \\ V_p V_p^T (P_{12}^p)^T & I_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n-z} & 0 \\ (P_{12}^p V_p)^T & V_p^{-1} \end{bmatrix},$$

onde V_p é tal que $P_{22}^p = V_p^{-T} V_p^{-1}$.

Mas, por hipótese, as matrizes P_p têm o mesmo complemento de Schur de ordem $n - z$. Suponhamos que $\mathcal{C}_{n-z}(P_p) = C$, para todo o $p \in \mathcal{P}$. Então, (4.3.3) é equivalente a

$$P_p = S_p^T \text{diag}(C, I_z) S_p, \quad p \in \mathcal{P}.$$

Assim, pela Proposição 1.1.8, $\text{diag}(C, I_z)$ é uma FLQ para as matrizes $S_p^{-1} A_p S_p$, qualquer que seja o $p \in \mathcal{P}$.

Em sentido inverso, suponhamos que existe um conjunto de matrizes invertíveis S_p tais que $S_p^{-1} A_p S_p, p \in \mathcal{P}$, possuem uma FLQC. Seja P uma FLQC desse conjunto de matrizes. Então, novamente pela Proposição 1.1.8, $\{S_p^{-T} P S_p^{-1}, p \in \mathcal{P}\}$ é um conjunto de FLQs de $\{A_p, p \in \mathcal{P}\}$. Além disso, pelo Lema 4.2.4,

$$\mathcal{C}_{n-z}(S_p^{-T} P S_p^{-1}) = \mathcal{C}_{n-z}(P).$$

Tomando $P_p := S_p^{-T} P S_p^{-1}$, concluímos que existe um conjunto de FLQs para o conjunto \mathcal{A} , com o mesmo complemento de Schur. ■

Teorema 4.3.3 (Critério de escolha) *Seja $\mathbb{X}^{RP} = (\mathcal{P}, \Sigma_{\mathcal{P}}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}}, \mathcal{R}^P)$ um sistema comutado com reset parcial de ordem z para o qual $\mathbb{P} = \{[P_{ij}^p]_{i,j=1,2}^{p \in \mathcal{P}} : P_{21}^p = (P_{12}^p)^T\}$ é um conjunto de FLQs com $(n - z)$ -CSC. Se a família de resets \mathcal{R}^P for constituída por matrizes do tipo*

$$R_{(q,p)} = \begin{bmatrix} I_{n-z} & 0 \\ V_p [P_{12}^q V_q - P_{12}^p V_p]^T & V_p V_q^{-1} \end{bmatrix}, \quad (4.3.4)$$

onde $P_{22}^p = V_p^{-T} V_p^{-1}$, para alguma matriz invertível $V_p, p \in \mathcal{P}$, então o sistema \mathbb{X}^{RP} é estável.

Demonstração: Considere-se cada matriz $P_{22}^p, p \in \mathcal{P}$, factorizada do seguinte modo:

$$P_{22}^p = V_p^{-T} V_p^{-1},$$

para alguma matriz invertível $V_p, p \in \mathcal{P}$. Tome-se, para cada $p \in \mathcal{P}$,

$$S_p := \begin{bmatrix} I_{n-z} & 0 \\ (P_{12}^p V_p)^T & V_p^{-1} \end{bmatrix}$$

tal como na demonstração do lema anterior. Atendendo a esse mesmo lema, as matrizes $S_p^{-1} A_p S_p, p \in \mathcal{P}$, possuem uma FLQC. Assim, escolhendo

$$R_{(q,p)} = S_p^{-1} S_q,$$

com $p, q \in \mathcal{P}$, e recorrendo ao Teorema 3.3.4 tem-se que o sistema \mathbb{X}^{RP} é estável. Para terminar a demonstração basta notar que

$$S_p^{-1} S_q = \begin{bmatrix} I_{n-z} & 0 \\ V_p [P_{12}^q V_q - P_{12}^p V_p]^T & V_p V_q^{-1} \end{bmatrix}, q, p \in \mathcal{P}.$$

■

Caso \mathbb{P} seja um conjunto de FLQs diagonais em blocos com $(n - z)$ -CSC então, de acordo com os Teoremas 3.3.2 e 4.3.3, as matrizes de reset parcial podem ser escolhidas de acordo com o corolário que se segue.

Corolário 4.3.4 *Seja $\mathbb{X}^{RP} = (\mathcal{P}, \Sigma_{\mathcal{P}}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}}, \mathcal{R}^P)$ um sistema comutado com reset parcial de ordem z que possui um conjunto de FLQs $P_p = \text{diag}(P, P_{22}^p), p \in \mathcal{P}$. O sistema \mathbb{X}^{RP} é estável se a família de resets \mathcal{R}^P for constituída por matrizes do tipo*

$$1. R_{(q,p)} = \text{diag}(I_{n-z}, V_p V_q^{-1}) \text{ com } P_{22}^p = V_p^{-T} V_p^{-1}, \text{ para alguma matriz invertível } V_p, p \in \mathcal{P};$$

$$2. R_{(q,p)} = \text{diag}(I_{n-z}, R_{22}^{(q,p)}) \text{ com } R_{22}^{(q,p)} = \alpha_{(q,p)} I_z \text{ e } \alpha_{(q,p)} = \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(P_{22}^q)}{\lambda_{\max}(P_{22}^p)}}, q, p \in \mathcal{P}.$$

Exemplo 4.3.5 O sistema comutado \mathbb{X} , do Exemplo 3.3.6, é estabilizável por reset parcial de ordem 1. Vimos nesse exemplo que, considerando as matrizes invertíveis $S_1 = \text{diag}(\sqrt{10}, 2\sqrt{5})$ e $S_2 = \text{diag}(2\sqrt{5}, \sqrt{10})$ então, $S_1 A_1 S_1^{-1}$ e $S_2 A_2 S_2^{-1}$ têm a matriz identidade como FLQC. Mas, se considerarmos $\bar{S}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} S_1$ e $\bar{S}_2 = \frac{1}{2\sqrt{5}} S_2$, isto é,

$$\bar{S}_1 = \text{diag}\left(1, \frac{2}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{e} \quad \bar{S}_2 = \text{diag}\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

então, $\bar{S}_1 A_1 \bar{S}_1^{-1} = \frac{1}{10} S_1 A_1 S_1^{-1}$ e $\bar{S}_2 A_2 \bar{S}_2^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{5}} S_2 A_2 S_2^{-1}$ continuam a ter a matriz identidade como FLQC. Desta forma, pelo Lema 4.3.2, existe um conjunto de FLQs diagonais \mathbb{P} com 1-CSC. Um desses conjuntos é constituído pelas matrizes

$$P_1 = \bar{S}_1^T \bar{S}_1 \quad \text{e} \quad P_2 = \bar{S}_2^T \bar{S}_2,$$

isto é, pelas matrizes

$$P_1 = \text{diag}(1, 2) \quad \text{e} \quad P_2 = \text{diag}\left(1, \frac{1}{2}\right).$$

Escolhendo as matrizes de reset parcial de acordo com o corolário anterior, obtemos

$$R_{(1,2)} = \bar{S}_2^{-1} \bar{S}_1 = \text{diag}(1, 2) \quad \text{e} \quad R_{(2,1)} = \bar{S}_1^{-1} \bar{S}_2 = \text{diag}\left(1, \frac{1}{2}\right)$$

tem-se que o sistema comutado dado com reset parcial (de ordem 1) é estável.

Observação 4.3.6 No exemplo anterior, $\mathbb{P} = \{\text{diag}(1, 2), \text{diag}(1, \frac{1}{2})\}$ é um conjunto \mathcal{R}^P -contractivo do sistema \mathbb{X} com $\mathcal{R}^P = \{\text{diag}(1, 2), \text{diag}(1, \frac{1}{2})\}$, pois

$$R_{(1,2)}^T P_2 R_{(1,2)} = \text{diag}(1, 2) = P_1 \quad \text{e} \quad R_{(2,1)}^T P_1 R_{(2,1)} = \text{diag}\left(1, \frac{1}{2}\right) = P_2.$$

Além disso, \mathbb{P} é um conjunto de FLQs com complemento de Schur comum, neste caso de ordem 1.

Com o próximo teorema, estabelecemos que a existência de um conjunto de FLQs \mathbb{P} com $(n - z)$ -CSC para um sistema comutado $\mathbb{X} = (\mathcal{P}, \Sigma_{\mathcal{P}}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}})$ não é apenas uma condição necessária como também uma condição suficiente de existência de uma família de resets parciais \mathcal{R}^P tal que \mathbb{P} é um conjunto de FLQs \mathcal{R}^P -contractivo do sistema $\mathbb{X}^{\mathcal{R}^P} = (\mathcal{P}, \Sigma_{\mathcal{P}}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}}, \mathcal{R}^P)$.

Teorema 4.3.7 *Seja $\mathbb{X} = (\mathcal{P}, \Sigma_{\mathcal{P}}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}})$ um sistema comutado e $\mathbb{P} = \{P_p, p \in \mathcal{P}\}$ um conjunto de matrizes simétricas e definidas positivas de ordem n . As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *Existe uma família \mathcal{R}^P de resets parciais de ordem z para a qual \mathbb{P} é um conjunto de FLQs \mathcal{R}^P -contractivo de $\mathbb{X}^{RP} = (\mathcal{P}, \Sigma_{\mathcal{P}}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}}, \mathcal{R}^P)$.*
2. *\mathbb{P} é um conjunto de FLQs com $(n - z)$ -CSC.*

Demonstração: Seja $\mathbb{X} = (\mathcal{P}, \Sigma_{\mathcal{P}}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}})$ um sistema comutado e $\mathbb{P} = \{P_p, p \in \mathcal{P}\}$ um conjunto de matrizes simétricas e definidas positivas de ordem n .

Suponhamos que existe uma família \mathcal{R}^P de resets parciais de ordem z para a qual \mathbb{P} é um conjunto de FLQs \mathcal{R}^P -contractivo de $\mathbb{X}^{RP} = (\mathcal{P}, \Sigma_{\mathcal{P}}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}}, \mathcal{R}^P)$ então, pela Proposição 4.2.6, \mathbb{P} é um conjunto de FLQs com $(n - z)$ -CSC.

Reciprocamente, suponhamos que $\mathbb{P} = \{P_p, p \in \mathcal{P}\}$ é um conjunto de FLQs com $(n - z)$ -CSC. Considerem-se as matrizes P_p definidas por

$$P_p = \begin{bmatrix} P_{11}^p & P_{12}^p \\ (P_{12}^p)^T & P_{22}^p \end{bmatrix}$$

tais que para cada bloco P_{22}^p existe alguma matriz invertível $V_p, p \in \mathcal{P}$, tal que $P_{22}^p = V_p^{-T} V_p^{-1}$. Considerando a família \mathcal{R}^P de resets parciais definidos de acordo com o Teorema 4.3.3, isto é,

$$\mathcal{R}^P = \left\{ R_{(q,p)} = \begin{bmatrix} I_{n-z} & 0 \\ V_p [P_{12}^q V_q - P_{12}^p V_p]^T & V_p V_q^{-1} \end{bmatrix}, q, p \in \mathcal{P} \right\}$$

temos que

$$R_{(q,p)} = S_p^{-1} S_q,$$

com

$$S_p := \begin{bmatrix} I_{n-z} & 0 \\ (P_{12}^p V_p)^T & V_p^{-1} \end{bmatrix}, p \in \mathcal{P}.$$

Desta forma, \mathbb{P} é um conjunto de FLQs \mathcal{R}^P -contractivo do sistema \mathbb{X}^{RP} , veja-se a prova do Teorema 3.3.4. ■

Atendendo à Definição 4.3.1, reformulamos o último teorema como se segue.

Corolário 4.3.8 *Se um sistema comutado \mathbb{X} possui um conjunto de FLQs com $(n - z)$ -CSC então, \mathbb{X} é estabilizável por reset parcial de ordem z .*

4.4 Considerações finais

Para um dado sistema comutado $\mathbb{X} = (\mathcal{P}, \Sigma_{\mathcal{P}}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}})$, saber quando existe uma família de FLQs com $(n - z)$ -CSC é um problema de difícil resolução, devido não só à existência de uma diversidade de FLQs para cada um dos sistemas que constituem o banco de comutação $\Sigma_{\mathcal{P}}$, mas sobretudo porque não nos é possível obter uma caracterização de um conjunto de FLQs para cada um desses sistemas. Por esta razão, é conveniente tratar esta questão optando por uma abordagem que contemple as características que o banco de comutação do sistema comutado possa apresentar, como a ordem e a natureza das matrizes a ele associadas. Desta forma, estabelecemos condições de existência de FLQs com o mesmo complemento de Schur para classes de sistemas comutados distintas e, ao mesmo tempo, identificamos nessas classes de sistemas, os sistemas que são estabilizáveis por reset parcial de determinada ordem. É esta a finalidade do capítulo subsequente.

Capítulo 5

Existência de FLQs com complemento de Schur comum e estabilização

Se um sistema comutado $\mathbb{X} = (\mathcal{P}, \Sigma_{\mathcal{P}}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}})$ possui uma família de FLQs com $(n - z)$ -CSC é possível, recorrendo a um reset parcial de ordem maior ou igual a z , obter a estabilidade do sistema associado \mathbb{X}^{RP} , Teorema 4.3.8. Neste sentido, caso $z < n$, o sistema \mathbb{X} diz-se um sistema comutado estabilizável por reset parcial de ordem z . Por sua vez, caso $z = n$, estamos perante uma estabilização por reset total, em que a condição “ \mathbb{X} possui uma família de FLQs com $(n - z)$ -CSC” degenera em “ \mathbb{X} possui uma família de FLQs com 0-CSC”, que é interpretado como exigindo apenas que as matrizes associadas ao banco de comutação sejam estáveis. Este caso foi estudado no Capítulo 3.

Neste capítulo, procuramos identificar classes de sistemas comutados que possuam famílias de FLQs com complementos de Schur comuns de determinada ordem. Começamos por reformular o problema de existência de FLQs com complemento de Schur comum e mostrar que nem toda a transformação de semelhança preserva o complemento de Schur de uma matriz. Debruçamo-nos de imediato nos sistemas comutados de ordem 2, mostrando que estes sistemas admitem sempre FLQs com 1-CSC. De seguida, estabelecemos uma condição suficiente que garante, no caso dos sistemas comutados de ordem 3 na forma companheira, a existência de famílias de FLQs com a propriedade mencionada. Por fim, direccionamos o nosso estudo, sobre estabilização por reset parcial, para a classe de sistemas comutados que admitem FLQs diagonais em blocos. Destacamos os sistemas comutados triangulares em blocos e os sistemas comutados positivos; os primeiros porque temos oportunidade de dar continuidade ao estudo iniciado no Capítulo 2 sobre estabilidade; e os sistemas comutados positivos, pela sua importância na resolução de problemas nas áreas de Ecologia, Biologia, Economia

e outras, [8].

5.1 Outra interpretação e invariância por transformações de semelhança

Comecemos por dar uma outra interpretação para o problema da existência de um conjunto de FLQs com complemento de Schur comum.

Lema 5.1.1 *Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz estável. A matriz C é o complemento de Schur de ordem $n - z$ de uma FLQ de A se, e só se, C^{-1} é o bloco (1,1) de ordem $n - z$ de uma FLQ de A^T .*

Demonstração: Seja P uma FLQ de A . Então, pela Proposição B.0.11, P^{-1} é uma FLQ de A^T . Mas, atendendo ao Teorema B.0.6, o bloco (1,1) de P^{-1} é igual ao $(\mathcal{C}_{n-z}(P))^{-1}$. Como, $\mathcal{C}_{n-z}(P)$ é igual a C , conclui-se que A^T possui uma FLQ cujo bloco (1,1) é de ordem $n - z$ e igual a C^{-1} .

Em sentido inverso, suponhamos que A^T possui uma FLQ $Q = [Q_{ij}]_{i,j=1,2}$ cujo bloco (1,1), de ordem $n - z$, é igual a Q_{11} . Provemos que Q_{11}^{-1} é o complemento de Schur de uma FLQ de A . Ora, se Q é uma FLQ de A^T então, ainda pelo Teorema B.0.6, Q^{-1} é uma FLQ de A . Provemos então que Q_{11}^{-1} é o complemento de Schur de ordem $n - z$ de Q^{-1} . Atendendo a que os blocos diagonais de Q , Q_{11} e Q_{22} , são invertíveis então,

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{-1} + Q_{11}^{-1}Q_{12}W^{-1}Q_{12}^TQ_{11}^{-1} & -Q_{11}^{-1}Q_{12}W^{-1} \\ -W^{-1}Q_{12}^TQ_{11}^{-1} & W^{-1} \end{bmatrix}, \quad (5.1.1)$$

onde $W = Q_{22} - Q_{12}^TQ_{11}^{-1}Q_{12}$, ([51] p. 11). Logo, facilmente concluimos que

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{n-z}(Q^{-1}) &= Q_{11}^{-1} + Q_{11}^{-1}Q_{12}W^{-1}Q_{12}^TQ_{11}^{-1} - Q_{11}^{-1}Q_{12}W^{-1}WW^{-1}Q_{12}^TQ_{11}^{-1} \\ &= Q_{11}^{-1}. \end{aligned}$$

■

Como consequência deste lema, a questão da existência de complemento de Schur comum pode reformular-se de acordo com o resultado que se segue.

Teorema 5.1.2 *Seja $\mathcal{A} = \{A_p, p \in \mathcal{P}\} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ um conjunto de matrizes estáveis. Então, \mathcal{A} admite um conjunto de FLQs com $(n - z)$ -CSC se, e só se, $\{A_p^T, p \in \mathcal{P}\}$ possui um conjunto de FLQs com o bloco $(1,1)$, de ordem $n - z$, comum.*

A reformulação do problema de existência de complemento de Schur comum não parece torná-lo mais fácil, mas é possível tirar partido desta reformulação em alguns casos não triviais. No entanto, na maior parte deste capítulo usamos FLQs diagonais em blocos em que a noção de $(n - z)$ -CSC coincide com a noção de bloco $(1,1)$, de ordem $n - z$, comum.

Como já referimos no Capítulo 1, Proposição 1.1.12, a existência de uma FLQC para um dado conjunto de matrizes é invariante sob qualquer transformação de semelhança. Isto é, se $\mathcal{A} = \{A_p, p \in \mathcal{P}\}$ possui uma FLQC então, $\tilde{\mathcal{A}} = \{T^{-1}A_pT, p \in \mathcal{P}\}$ também possui uma FLQC, qualquer que seja a matriz complexa invertível T . Contudo, é de referir que o mesmo não sucede relativamente à propriedade de existência de FLQs com complemento de Schur comum. Efectivamente, dado $\mathcal{A} = \{A_p, p \in \mathcal{P}\}$ que admite um conjunto de FLQs com $(n - z)$ -CSC e uma matriz complexa invertível T , nem sempre $\tilde{\mathcal{A}} = \{T^{-1}A_pT, p \in \mathcal{P}\}$ possui um conjunto de FLQs com $(n - z)$ -CSC.

Exemplo 5.1.3 *Consideremos duas matrizes estáveis em $\mathbb{R}^{4 \times 4}$, com estrutura diagonal em blocos:*

$$A_p = \begin{bmatrix} -I_2 & 0 \\ 0 & A_{22}^p \end{bmatrix}, \quad p = 1, 2,$$

onde I_2 representa a matriz identidade de ordem 2 e $A_{22}^p, p = 1, 2$, são matrizes estáveis de ordem 2. Do Capítulo 2, sabemos que existem $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^+$ tal que as matrizes A_1, A_2 possuem FLQs diagonais em blocos do tipo

$$\text{diag}(I_2, \alpha_p P_p), \quad p = 1, 2,$$

onde I_2 é uma FLQ para os blocos $(1,1)$ e P_p são FLQs para os blocos $A_{22}^p, p = 1, 2$, respectivamente. Por conseguinte, o conjunto das matrizes dadas possui um conjunto de FLQs com 2-CSC (igual à matriz identidade de ordem 2). Considerando a matriz invertível

$$T = \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{bmatrix},$$

resulta, tendo em conta que $T^{-1} = T$,

$$T^{-1}A_pT = \begin{bmatrix} A_{22}^p & 0 \\ 0 & -I_2 \end{bmatrix}, p = 1, 2.$$

Mas, pelo Teorema 5.1.2, para que o conjunto destas matrizes possua um conjunto de FLQs com 2-CSC tem que o conjunto das respectivas matrizes transpostas admitir um conjunto de FLQs com bloco (1,1) comum, de ordem 2,

$$\begin{bmatrix} P & P_{12}^p \\ (P_{12}^p)^T & P_{22}^p \end{bmatrix}, p = 1, 2,$$

respectivamente. Nestas condições, é necessário que P seja uma FLQC para os blocos $(A_{22}^p)^T, p = 1, 2$, o que equivale a dizer que, é necessário que P^{-1} seja uma FLQC para os blocos $A_{22}^p, p = 1, 2$, o que nem sempre acontece. Veja-se, por exemplo, o caso em que nas matrizes A_1 e A_2 , os blocos $A_{22}^p, p = 1, 2$, são:

$$A_{22}^1 = \begin{bmatrix} -0.05 & 2 \\ -1 & -0.05 \end{bmatrix} \text{ e } A_{22}^2 = \begin{bmatrix} -0.05 & 1 \\ -2 & -0.05 \end{bmatrix}.$$

Estes blocos não possuem FLQC, pois o sistema comutado cujo banco de comutação associado a A_{22}^1 e A_{22}^2 é instável (ver Exemplo 3.2.5).

Porém, para certas transformações de semelhança é possível garantir a preservação da propriedade de existência de $(n - z)$ -CSC, de acordo com a próxima proposição.

Proposição 5.1.4 *Sejam $\mathcal{A} = \{A_p, p \in \mathcal{P}\} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ um conjunto de matrizes estáveis, particionadas em 2×2 -blocos, cujos blocos (1,1) são de ordem $n - z$, e \mathcal{G} um conjunto de matrizes invertíveis em $\mathbb{C}^{n \times n}$ tal que*

$$\mathcal{G} = \left\{ G_p = \begin{bmatrix} G_{11} & 0 \\ G_{21}^p & G_{22}^p \end{bmatrix}, G_{11} \in \mathbb{C}^{(n-z) \times (n-z)} \text{ e } p \in \mathcal{P} \right\}.$$

O conjunto \mathcal{A} possui um conjunto de FLQs com $(n - z)$ -CSC se, e somente se, o conjunto $\{G_p^{-1}A_pG_p, p \in \mathcal{P}\}$ possui um conjunto de FLQs com $(n - z)$ -CSC.

Demonstração: Basta atender à Proposição 1.1.12 (P_p são FLQs de A_p se, e só se, $G_p^*P_pG_p$ são FLQs de $G_p^{-1}A_pG_p, p \in \mathcal{P}$) e ao Lema 4.2.4. ■

Reunindo a proposição anterior com o Corolário 4.3.8 podemos enunciar o seguinte resultado.

Corolário 5.1.5 *Sejam $\mathbb{X} = (\mathcal{P}, \Sigma_{\mathcal{P}}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}})$ e $\tilde{\mathbb{X}} = (\mathcal{P}, \tilde{\Sigma}_{\mathcal{P}}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}})$ sistemas comutados cujos bancos de comutação estão associados aos conjuntos de matrizes estáveis $\{A_p, p \in \mathcal{P}\}$ e $\{T_p^{-1}A_pT_p, p \in \mathcal{P}\}$, respectivamente, onde*

$$T_p = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ T_{21}^p & T_{22}^p \end{bmatrix}, \quad p \in \mathcal{P},$$

são matrizes complexas invertíveis. Se o sistema $\tilde{\mathbb{X}}$ possui um conjunto de FLQs com $(n - z)$ -CSC então, o sistema \mathbb{X} é estabilizável por reset parcial de ordem z .

Observação 5.1.6 *O corolário anterior foi obtido usando exclusivamente argumentos algébricos. No entanto, o que nele se estabelece é perfeitamente natural à luz daquilo que se entende por reset parcial de um sistema comutado e da forma como se podem obter matrizes de reset parcial à custa das matrizes T_p . Efectivamente, tomando resets do tipo $T_p^{-1}T_q$, $p, q \in \mathcal{P}$, estes são resets parciais de ordem $n - z$.*

5.2 Sistemas comutados de ordem 2 e de ordem 3

Excepcionalmente, o caso que a seguir apresentamos é de fácil abordagem.

Proposição 5.2.1 *Se $\mathcal{A} = \{A_p, p \in \mathcal{P}\} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ for um conjunto de matrizes estáveis então, existe um conjunto de FLQs com 1-CSC.*

Demonstração: Se $\mathcal{A} = \{A_p, p \in \mathcal{P}\} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ for um conjunto de matrizes estáveis então, existe um conjunto de FLQs, $\mathcal{L} = \{P_p, p \in \mathcal{P}\}$, tais que $\mathcal{C}_1(P_p) := C_p \in \mathbb{R}^+, p \in \mathcal{P}$. Mas, se P_p é uma FLQ para $A_p, p \in \mathcal{P}$, então $\frac{1}{C_p}P_p$ também o é. Logo

$$\bar{\mathcal{L}} = \left\{ \frac{1}{C_p}P_p, p \in \mathcal{P} \right\}$$

é um conjunto de FLQs de \mathcal{A} obtido de um conjunto de FLQs qualquer, \mathcal{L} , e com 1-CSC.

■

Da proposição anterior obtém-se:

Teorema 5.2.2 *Qualquer sistema comutado de ordem 2 é estabilizável por reset parcial. Mais, qualquer sistema comutado de ordem n é sempre estabilizável por reset parcial de ordem $n - 1$.*

De facto, como existe sempre um conjunto de FLQs com complemento de Schur comum de ordem 1, então é possível obter a estabilidade de um sistema comutado com reset parcial de ordem $n - 1$. É claro que, com resets parciais desta ordem, apenas uma componente do estado permanece inalterada. Por este motivo, é importante que prossigamos o nosso estudo sobre o problema da existência de complemento de Schur comum de ordens superiores, procurando saber como estabilizar um sistema à custa de resets parciais que permitam manter livre um maior número de componentes do estado. Vamos de seguida analisar o caso dos sistemas comutados de ordem 3 em que as matrizes associadas ao banco de comutação são matrizes companheiras.

Um sistema $\mathbb{X} = (\mathcal{P}, \Sigma_{\mathcal{P}}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}})$ diz-se um *sistema comutado de ordem 3 na forma companheira* se o banco de comutação $\Sigma_{\mathcal{P}}$ está associado a um conjunto de matrizes reais A_p definidas por:

$$A_p = \begin{bmatrix} -a_1^p & -a_2^p & -a_3^p \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, p \in \mathcal{P}. \quad (5.2.1)$$

Estas matrizes são designadas por *matrizes companheiras*.

É fácil de verificar que os polinómios característicos das matrizes (5.2.1) são dados por:

$$P^p(s) := s^3 + a_1^p s^2 + a_2^p s + a_3^p = 0, \quad p \in \mathcal{P},$$

respectivamente. Segundo o Critério de Routh-Hurwitz, ([2], p. 150), uma condição necessária e suficiente para que A_p seja estável é:

$$a_2^p > \frac{a_3^p}{a_1^p} \quad \text{e} \quad a_i^p \in \mathbb{R}^+, \quad (5.2.2)$$

onde $i = 1, 2, 3$ e $p \in \mathcal{P}$. A seguir mostramos que, quando o menor dos valores de a_2^p for superior ao maior dos valores de $\frac{a_3^p}{a_1^p}$, as matrizes $A_p, p \in \mathcal{P}$, possuem um conjunto de

FLQs com 2-CSC, o que permitirá obter a estabilidade do sistema \mathbb{X} através da aplicação de resets que alteram apenas a terceira componente do estado do sistema.

Teorema 5.2.3 *Seja \mathbb{X} um sistema comutado de ordem 3 na forma companheira, cujo banco de comutação está associado a um conjunto de matrizes estáveis (5.2.1). Se, para $p \in \mathcal{P}$,*

$$\min_{p \in \mathcal{P}} [a_2^p] > \max_{p \in \mathcal{P}} \left[\frac{a_3^p}{a_1^p} \right] \quad (5.2.3)$$

então, \mathbb{X} é estabilizável por reset parcial de ordem 1.

Demonstração: Consideremos o conjunto \mathcal{A} constituído pelas matrizes $A_p, p \in \mathcal{P}$, definidas como em (5.2.1) tal que o menor dos valores de a_2^p é superior ao maior dos valores de $\frac{a_3^p}{a_1^p}$, com $p \in \mathcal{P}$. Pretendemos mostrar que, o sistema comutado associado a \mathcal{A} é estabilizável por reset parcial de ordem 1. Para o efeito, provemos que \mathcal{A} possui um conjunto com FLQs com 2-CSC ou, atendendo ao Teorema 5.1.2, provemos que existe um conjunto de FLQs com bloco (1,1) comum para as transpostas das matrizes A_p :

$$A_p^T = \begin{bmatrix} -a_1^p & 1 & 0 \\ -a_2^p & 0 & 1 \\ -a_3^p & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad p \in \mathcal{P}. \quad (5.2.4)$$

Consideremos matrizes simétricas $P_p, p \in \mathcal{P}$, particionadas em blocos:

$$P_p = \begin{bmatrix} b & c & p_{13}^p \\ c & d & p_{23}^p \\ p_{13}^p & p_{23}^p & p_{33}^p \end{bmatrix}, \quad p \in \mathcal{P}.$$

Seja $Q_p := -A_p P_p - P_p A_p^T, p \in \mathcal{P}$. Então,

$$Q_p = \begin{bmatrix} 2(a_1^p b + a_2^p c + a_3^p p_{13}^p) & a_1^p c + a_2^p d + a_3^p p_{23}^p - b & a_1^p p_{13}^p + a_2^p p_{23}^p + a_3^p p_{33}^p - c \\ a_1^p c + a_2^p d + a_3^p p_{23}^p - b & -2c & -d - p_{13}^p \\ a_1^p p_{13}^p + a_2^p p_{23}^p + a_3^p p_{33}^p - c & -d - p_{13}^p & -2p_{23}^p \end{bmatrix}.$$

Tomando para cada $p \in \mathcal{P}$:

$$\begin{aligned} p_{13}^p &= -d \\ p_{23}^p &= \frac{1}{a_3^p} (b - a_1^p c + a_2^p p_{13}^p) \\ p_{33}^p &= \frac{1}{a_3^p} (c - a_1^p p_{13}^p - a_2^p p_{23}^p), \end{aligned}$$

obtemos

$$Q_p = \text{diag} \left(2(a_1^p b + a_2^p c - a_3^p d), -2c, -\frac{2}{a_3^p} (b - a_1^p c - a_2^p d) \right), p \in \mathcal{P}.$$

Como as matrizes A_p são estáveis, mostrando que é possível escolher b, c, d e as restantes entradas de P_p em função destes, tais que $Q_p > 0$, então P_p é necessariamente definida negativa. Desse modo, provamos que existe um conjunto de FLQs com bloco (1,1) comum de ordem 2.

Considere-se, por uma questão de simplicidade, $c = -1$, pois na realidade podemos tomar para c qualquer valor negativo. Assim, tem que ser possível escolher b e d tais que

$$\frac{1}{a_1^p} (a_3^p d + a_2^p) < b < -a_1^p + a_2^p d, \text{ para todo o } p \in \mathcal{P},$$

ou seja, tais que

$$\max_{p \in \mathcal{P}} \left[\frac{1}{a_1^p} (a_3^p d + a_2^p) \right] < b < \min_{p \in \mathcal{P}} [-a_1^p + a_2^p d]. \quad (5.2.5)$$

Para tal ser possível, é necessário que exista d tal que

$$\max_{p \in \mathcal{P}} \left[\frac{1}{a_1^p} (a_3^p d + a_2^p) \right] < \min_{p \in \mathcal{P}} [-a_1^p + a_2^p d]. \quad (5.2.6)$$

Tome-se

$$d > \frac{-\min_{p \in \mathcal{P}} [-a_1^p] + \max_{p \in \mathcal{P}} \left[\frac{a_2^p}{a_1^p} \right]}{\min_{p \in \mathcal{P}} [a_2^p] - \max_{p \in \mathcal{P}} \left[\frac{a_3^p}{a_1^p} \right]}, \text{ para todo o } p \in \mathcal{P}. \quad (5.2.7)$$

Note-se que, por hipótese, $\min_{p \in \mathcal{P}} [a_2^p] - \max_{p \in \mathcal{P}} \left[\frac{a_3^p}{a_1^p} \right] > 0$ e, portanto, existe $d \in \mathbb{R}^+$ em tais condições. Além disso, pelo mesmo motivo,

$$\left(\min_{p \in \mathcal{P}} [a_2^p] - \max_{p \in \mathcal{P}} \left[\frac{a_3^p}{a_1^p} \right] \right) d > -\min_{p \in \mathcal{P}} [-a_1^p] + \max_{p \in \mathcal{P}} \left[\frac{a_2^p}{a_1^p} \right],$$

ou, equivalentemente,

$$\max_{p \in \mathcal{P}} \left[\frac{a_3^p}{a_1^p} \right] d + \max_{p \in \mathcal{P}} \left[\frac{a_2^p}{a_1^p} \right] < \min_{p \in \mathcal{P}} [-a_1^p] + \min_{p \in \mathcal{P}} [a_2^p].$$

Por outro lado, pela Proposição C.0.12,

$$\max_{p \in \mathcal{P}} \left[\frac{1}{a_1^p} (a_3^p d + a_2^p) \right] \leq \max_{p \in \mathcal{P}} \left[\frac{a_3^p}{a_1^p} \right] d + \max_{p \in \mathcal{P}} \left[\frac{a_2^p}{a_1^p} \right]$$

e

$$\min_{p \in \mathcal{P}} [-a_1^p] + \min_{p \in \mathcal{P}} [a_2^p] \leq \min_{p \in \mathcal{P}} [-a_1^p + a_2^p d].$$

Logo, (5.2.6) é satisfeita para a escolha de d feita em (5.2.7). Para concluir, b deverá ser escolhido de acordo com (5.2.5), depois de se ter fixado um determinado d (satisfazendo (5.2.7)). ■

Exemplo 5.2.4 *Seja \mathbb{X} um sistema comutado cujo banco de comutação está associado às matrizes:*

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1.5 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mostremos que \mathbb{X} é estabilizável por reset parcial de ordem 1. Em primeiro lugar, notemos que as matrizes dadas são estáveis e não possuem nenhuma FLQC ($A_1 A_2$ possui valores próprios reais negativos), [41]. Como

$$\min_{p \in \mathcal{P}} [a_2^p] = \min \{2, 3\} > \max_{p \in \mathcal{P}} \left[\frac{a_3^p}{a_1^p} \right] = \max \left\{ \frac{1}{3}, \frac{4}{3} \right\}$$

então, o sistema \mathbb{X} possui um conjunto de FLQs com 2-CSC e, por conseguinte, é estabilizável por reset parcial de ordem 1.

5.3 Sistemas comutados com FLQs diagonais em blocos

Para os sistemas comutados com FLQs diagonais em blocos do tipo $\text{diag}(P_1, P_2)$, procurar-se-á identificar, se possível, conjuntos de FLQs deste tipo, mas com complemento de Schur comum. É evidente que, estas FLQs têm o bloco (1,1) comum, pois coincide com o complemento de Schur de cada uma delas. Dentre essa classe de sistemas dedicar-nos-emos, mais adiante, em especial aos sistemas comutados triangulares em blocos e aos sistemas comutados positivos. Em primeiro lugar, é importante notar que, se um sistema comutado possui um conjunto de FLQs diagonais em 2×2 - blocos então, os blocos diagonais das matrizes do sistema, que se encontram igualmente particionadas, são estáveis. Em particular, se tais FLQs forem do tipo $\text{diag}(P, P_{22}^p), p \in \mathcal{P}$, tem-se:

Lema 5.3.1 *Se um conjunto de matrizes estáveis $\{A_p = [A_{ij}^p]_{i,j=1,2}, p \in \mathcal{P}\} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ possui um conjunto de FLQs diagonais em blocos com $(n-z)$ -CSC igual a P então, P é uma FLQC para o conjunto $\{A_{11}^p, p \in \mathcal{P}\}$, e as matrizes $A_{22}^p, p \in \mathcal{P}$, são estáveis.*

Demonstração: Consideremos as matrizes A_p e as respectivas FLQs P_p dadas por

$$A_p = \begin{bmatrix} A_{11}^p & A_{12}^p \\ A_{21}^p & A_{22}^p \end{bmatrix} \text{ e } P_p = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & P_{22}^p \end{bmatrix}, p \in \mathcal{P}.$$

Notemos que, as matrizes P_p têm complemento de Schur comum, igual a P . Então,

$$-A_p^T P_p - P_p A_p = \begin{bmatrix} (-A_{11}^p)^T P - P A_{11}^p & \times \\ \times & -(A_{22}^p)^T P_{22}^p - P_{22}^p A_{22}^p \end{bmatrix}$$

é uma matriz simétrica definida positiva, qualquer que seja o $p \in \mathcal{P}$. Consequentemente,

$$-(A_{11}^p)^T P - P A_{11}^p > 0 \quad \text{e} \quad -(A_{22}^p)^T P_{22}^p - P_{22}^p A_{22}^p > 0,$$

isto é, P é uma FLQC para as matrizes A_{11}^p e P_{22}^p são FLQs para as matrizes $A_{22}^p, p \in \mathcal{P}$, respectivamente. ■

Identificadas as condições necessárias para a existência de FLQs diagonais em blocos com $(n-z)$ -CSC vamos, sob tais condições, estabelecer condições suficientes. Para o efeito, vamos admitir que as matrizes do banco de comutação do sistema comutado são dadas por

$$A_p = \begin{bmatrix} A_{11}^p & A_{12}^p \\ A_{21}^p & A_{22}^p \end{bmatrix}, \quad (5.3.1)$$

onde $A_{11}^p \in \mathbb{R}^{(n-z) \times (n-z)}$ e que existem FLQs, P_{22}^p , para os blocos (2,2) das matrizes A_p , respectivamente, e uma FLQC, P , para o conjunto dos blocos (1,1) tais que:

$$\begin{aligned} (A_{11}^p)^T P + P A_{11}^p &= -Q_1^p < 0, \text{ para todo o } p \in \mathcal{P}; \\ (A_{22}^p)^T P_{22}^p + P_{22}^p A_{22}^p &= -Q_2^p < 0, p \in \mathcal{P}, \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

respectivamente.

Teorema 5.3.2 *Seja \mathbb{X} um sistema comutado cujo banco de comutação está associado a um conjunto de matrizes estáveis particionadas em 2×2 -blocos de acordo com (5.3.1) e que satisfazem as condições (5.3.2). Se, para cada $p \in \mathcal{P}$,*

$$16\lambda_{\max} \left[(A_{12}^p)^T P (Q_1^p)^{-1} P A_{12}^p \right] \lambda_{\max} \left[P_{22}^p A_{21}^p (Q_1^p)^{-1} (A_{21}^p)^T P_{22}^p \right] < (\lambda_{\min} [Q_2^p])^2$$

então, o sistema \mathbb{X} possui um conjunto de FLQs diagonais em blocos com $(n - z)$ -CSC. Mais, o sistema \mathbb{X} é estabilizável por reset parcial de ordem z .

Demonstração: Seja $\mathcal{A} = \{A_p = [A_{ij}^p]_{i,j=1,2}, p \in \mathcal{P}\}$ um conjunto de matrizes estáveis em $\mathbb{R}^{n \times n}$. Suponhamos que P é uma FLQC para as matrizes A_{11}^p , P_{22}^p são FLQs para as matrizes A_{22}^p , respectivamente, e

$$16\lambda_{\max} \left[(A_{12}^p)^T P (Q_1^p)^{-1} P A_{12}^p \right] \lambda_{\max} \left[P_{22}^p A_{21}^p (Q_1^p)^{-1} (A_{21}^p)^T P_{22}^p \right] < (\lambda_{\min} [Q_2^p])^2, \quad (5.3.3)$$

para todo o $p \in \mathcal{P}$.

Se \mathcal{A} for um conjunto de matrizes diagonais ($A_{12}^p = 0$ e $A_{21}^p = 0$, para todo o $p \in \mathcal{P}$) então, tendo em conta que \mathcal{A} satisfaz as as condições (5.3.2), facilmente se conclui que $\{P_p = \text{diag}(P, P_{22}^p), p \in \mathcal{P}\}$ é um conjunto de FLQs diagonais em blocos com complemento de Schur comum para \mathcal{A} .

Consideremos agora o caso em que \mathcal{A} é um conjunto de matrizes triangulares em blocos (ou $A_{12}^p = 0$ ou $A_{21}^p = 0$, para todo o $p \in \mathcal{P}$). Se $A_{12}^p = 0$, para todo o $p \in \mathcal{P}$, e $A_{21}^p \neq 0$, para algum $p \in \mathcal{P}$, então, considerando a abordagem adoptada na Secção 2.1, é possível identificar um conjunto de FLQs do tipo $\text{diag}(P, \epsilon_p P_{22}^p)$, onde

$$0 < \epsilon_p < \frac{\lambda_{\min} [Q_2^p]}{\lambda_{\max} \left[P_{22}^p A_{21}^p (Q_1^p)^{-1} (A_{21}^p)^T P_{22}^p \right]}. \quad (5.3.4)$$

Analogamente, se $A_{21}^p = 0$, para todo o $p \in \mathcal{P}$, e $A_{12}^p \neq 0$, para algum $p \in \mathcal{P}$, então, é possível identificar um conjunto de FLQs do tipo $\text{diag}(P, \beta_p P_{22}^p)$, onde

$$\beta_p > \frac{\lambda_{\max} \left[(A_{12}^p)^T P (Q_1^p)^{-1} P A_{12}^p \right]}{\lambda_{\min} [Q_2^p]}. \quad (5.3.5)$$

Doutro modo, suponhamos que \mathcal{A} é um conjunto de matrizes em que $A_{12}^p \neq 0$ e $A_{21}^p \neq 0$, qualquer que seja o $p \in \mathcal{P}$. Com base na abordagem adoptada na Secção 2.2, consideremos as matrizes A_p escritas como:

$$A_p = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}A_{11}^p & 0 \\ A_{21}^p & \frac{1}{2}A_{22}^p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}A_{11}^p & A_{12}^p \\ 0 & \frac{1}{2}A_{22}^p \end{bmatrix}, p \in \mathcal{P}. \quad (5.3.6)$$

Denotemos por T_p e por W_p a primeira e a segunda parcelas de (5.3.6). Então, tendo em conta os casos anteriores, para as matrizes T_p , $\text{diag}(P, t_p P_{22}^p)$ são FLQs se:

$$\begin{aligned} 0 < t_p &< \frac{\lambda_{\min} \left[\frac{1}{2} Q_2^p \right]}{\lambda_{\max} \left[P_{22}^p A_{21}^p \left(\frac{1}{2} Q_1^p \right)^{-1} (A_{21}^p)^T P_{22}^p \right]} \\ &= \frac{\lambda_{\min} [Q_2^p]}{4\lambda_{\max} \left[P_{22}^p A_{21}^p (Q_1^p)^{-1} (A_{21}^p)^T P_{22}^p \right]} \end{aligned}$$

e para as matrizes W_p , $\text{diag}(P, w_p P_{22}^p)$ são FLQs se:

$$\begin{aligned} w_p &> \frac{\lambda_{\max} \left[(A_{12}^p)^T P \left(\frac{1}{2} Q_1^p \right)^{-1} P A_{12}^p \right]}{\lambda_{\min} \left[\frac{1}{2} Q_2^p \right]} \\ &= \frac{4\lambda_{\max} \left[(A_{12}^p)^T P (Q_1^p)^{-1} P A_{12}^p \right]}{\lambda_{\min} [Q_2^p]}. \end{aligned}$$

Ora, (5.3.3) é equivalente a

$$\frac{4\lambda_{\max} \left[(A_{12}^p)^T P (Q_1^p)^{-1} P A_{12}^p \right]}{\lambda_{\min} [Q_2^p]} < \frac{\lambda_{\min} [Q_2^p]}{4\lambda_{\max} \left[P_{22}^p A_{21}^p (Q_1^p)^{-1} (A_{21}^p)^T P_{22}^p \right]},$$

o que permite escolher, para cada $p \in \mathcal{P}$, $t_p = w_p$. Obtém-se assim, para cada A_p uma FLQ do tipo $\text{diag}(P, \alpha_p P_{22}^p)$ com $\alpha_p := t_p = w_p$, $p \in \mathcal{P}$.

Em suma, o sistema comutado \mathbb{X} possui um conjunto de FLQs diagonais em blocos com $(n-z)$ -CSC de ordem igual à ordem de A_{11}^p , $p \in \mathcal{P}$ e, por conseguinte, é estabilizável por reset parcial de ordem igual à ordem das matrizes A_{22}^p , $p \in \mathcal{P}$. ■

Exemplo 5.3.3 As matrizes

$$A_1 = \left[\begin{array}{cc|cc} -2 & -1 & 1 & -1 \\ -0.5 & -2 & 0.5 & 2 \\ \hline -1 & 1 & -6 & -9 \\ -1 & -2 & 9 & -6 \end{array} \right] \quad e \quad A_2 = \left[\begin{array}{cc|cc} -100 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -120 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -10 & -11 \\ -1 & 1 & 150 & 0 \end{array} \right]$$

possuem FLQs com 2-CSC. Notemos em primeiro lugar que os blocos $(1,1)$, A_{11}^1 e A_{11}^2 , possuem uma FLQC

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -0.2 \\ -0.2 & 1 \end{bmatrix}$$

e os blocos $(2,2)$ são estáveis (mas não possuem uma FLQC, pois os valores próprios do produto desses blocos são reais negativos). Sejam

$$P_{22}^1 = \text{diag}(0.08, 0.08) \quad e \quad P_{22}^2 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.04 \\ 0.04 & 0.05 \end{bmatrix}$$

FLQs dos blocos $(2,2)$, respectivamente. Então,

$$Q_1^1 = \begin{bmatrix} 3.8 & 0.7 \\ 0.7 & 3.6 \end{bmatrix}; \quad Q_1^2 = \begin{bmatrix} 200.4 & -45 \\ -45 & 240 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} Q_2^1 &= \text{diag}(0.96, 0.96) & (\lambda_{\min} [Q_2^1])^2 &\approx 0.9216; \\ Q_2^2 &= \begin{bmatrix} 2 & 0.6 \\ 0.6 & 0.88 \end{bmatrix} & (\lambda_{\min} [Q_2^2])^2 &\approx 0.3835. \end{aligned}$$

Vejamos que as condições do teorema anterior se verificam:

- para $p = 1$:

$$\begin{aligned} 16\lambda_{\max} \left[(A_{12}^1)^T P (Q_1^1)^{-1} P A_{12}^1 \right] \lambda_{\max} \left[P_{22}^1 A_{21}^1 (Q_1^1)^{-1} (A_{21}^1)^T P_{22}^1 \right] \\ \approx 0.3248 < (\lambda_{\min} [Q_2^1])^2 \end{aligned}$$

- para $p = 2$:

$$\begin{aligned} 16\lambda_{\max} \left[(A_{12}^1)^T P (Q_1^1)^{-1} P A_{12}^1 \right] \lambda_{\max} \left[P_{22}^2 A_{21}^2 (Q_1^2)^{-1} (A_{21}^2)^T P_{22}^2 \right] \\ \approx 0.0008 < (\lambda_{\min} [Q_2^2])^2. \end{aligned}$$

Então, pelo Teorema 5.3.2, as matrizes A_1 e A_2 possuem FLQs com 2-CSC e, portanto, o sistema comutado de ordem 4, cujo banco de comutação está associado às matrizes dadas, é estabilizável por reset parcial de ordem 2.

O resultado que exprimimos no próximo teorema é uma aplicação directa do Lema 2.2.5 e obtém-se usando os mesmos argumentos da prova do Teorema 2.2.6 do Capítulo 2. Este resultado permitirá nalguns casos identificar sistemas comutados que admitem um conjunto de FLQs diagonais em blocos com $(n - z)$ -CSC.

Teorema 5.3.4 *Seja \mathbb{X} um sistema comutado cujo banco de comutação está associado a um conjunto de matrizes estáveis particionadas em 2×2 -blocos de acordo com (5.3.1) e que satisfazem as condições (5.3.2). Se, para cada $p \in \mathcal{P}$,*

$$\lambda_{\min}(Q_1^p) > 4 \|PA_{12}^p\|_s \left\| A_{21}^{p^T} P_{22}^p \right\|_s \left\| (Q_2^p)^{-1} \right\|_s \quad (5.3.7)$$

então, o sistema \mathbb{X} possui um conjunto de FLQs diagonais em blocos com $(n - z)$ -CSC. Mais, o sistema \mathbb{X} é estabilizável por reset parcial de ordem z .

5.4 Sistemas comutados triangulares em blocos

Nesta secção, analisamos em que condições os sistemas triangulares em blocos satisfazem a propriedade de existência de complemento de Schur comum e mostramos que a estabilização via reset parcial pode ser bem sucedida sem que este tipo de sistemas necessite de satisfazer esta propriedade. Começamos por estabelecer uma condição necessária e suficiente para a existência de um conjunto de FLQs com $(n - z)$ -CSC para um sistema comutado cujo banco de comutação está associado a um conjunto de matrizes com uma estrutura triangular superior em 2×2 -blocos.

Teorema 5.4.1 *Seja $\mathbb{X} = (\mathcal{P}, \Sigma_{\mathcal{P}}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}})$ um sistema comutado cujo banco de comutação está associado ao conjunto de matrizes estáveis em $\mathbb{R}^{n \times n}$*

$$\left\{ A_p = \begin{bmatrix} A_{11}^p & A_{12}^p \\ 0 & A_{22}^p \end{bmatrix} : A_{11}^p \in \mathbb{R}^{(n-z) \times (n-z)}, p \in \mathcal{P} \right\}. \quad (5.4.1)$$

As seguintes proposições são equivalentes.

- i) \mathbb{X} possui um conjunto de FLQs com $(n - z)$ -CSC.*
- ii) \mathbb{X} possui um conjunto de FLQs diagonais em 2×2 -blocos com $(n - z)$ -CSC.*
- iii) $\mathbb{X}^1 = (\mathcal{P}, \Sigma_{\mathcal{P}}^1, \mathcal{S}_{\mathcal{P}})$ cujo banco de comutação está associado ao conjunto dos blocos $(1, 1)$ das matrizes A_p , $\{A_{11}^p, p \in \mathcal{P}\}$, possui uma FLQC.*

Demonstração: $ii) \Rightarrow i)$ É óbvio.

$i) \Rightarrow iii)$ Suponhamos que o sistema \mathbb{X} possui um conjunto de FLQs com $(n - z)$ -CSC. Então, pelo Teorema 5.1.2, o conjunto das transpostas das matrizes A_p possui um conjunto de FLQs com o bloco $(1,1)$ comum, digamos,

$$\left\{ P_p = \begin{bmatrix} P & P_{12}^p \\ (P_{12}^p)^T & P_{22}^p \end{bmatrix}, p \in \mathcal{P} \right\}.$$

Então, tendo em conta a estrutura das matrizes A_p e P_p ,

$$-A_p P_p - P_p A_p^T = \begin{bmatrix} -A_{11}^p P - P A_{11}^{p^T} & \times \\ \times & \times \end{bmatrix} > 0, \text{ para todo o } p \in \mathcal{P},$$

o que implica que

$$-A_{11}^p P - P (A_{11}^p)^T > 0, \text{ para todo o } p \in \mathcal{P}.$$

Assim, P é uma FLQC para as matrizes $(A_{11}^p)^T, p \in \mathcal{P}$. Pela Proposição B.0.11, P^{-1} é uma FLQC para o conjunto $\{A_{11}^p, p \in \mathcal{P}\}$. Logo, o sistema comutado cujo banco de comutação está associado a este conjunto de matrizes, possui uma FLQC.

$iii) \Rightarrow ii)$ Suponhamos que o sistema comutado $\mathbb{X}^1 = (\mathcal{P}, \Sigma_{\mathcal{P}}^1, \mathcal{S}_{\mathcal{P}})$, cujo banco de comutação está associado ao conjunto $\{A_{11}^p, p \in \mathcal{P}\}$, possui uma FLQC. Então, o sistema \mathbb{X} cujo banco de comutação está associado ao conjunto (5.4.1) satisfaz as condições do Teorema 5.3.2. Logo, o sistema comutado \mathbb{X} possui um conjunto de FLQs com $(n - z)$ -CSC (que são diagonais em 2×2 -blocos). ■

Observação 5.4.2 *De forma análoga se estabelece o resultado do teorema anterior para um sistema comutado cujo banco de comutação está associado a um conjunto de matrizes com uma estrutura triangular inferior em 2×2 -blocos.*

Como já foi referido a propriedade de existência de complemento de Schur comum não é preservada por qualquer transformação de semelhança (veja-se o Exemplo 5.1.3), a menos que seja do tipo

$$T_p = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ T_{21}^p & T_{22}^p \end{bmatrix}, \quad T_{11} \in \mathbb{C}^{(n-z) \times (n-z)}, \quad (5.4.2)$$

onde T_{11} , T_{22}^p são matrizes invertíveis e T_{11} não depende de p , Proposição 5.1.4.

Caso as matrizes A_p associadas ao banco de comutação de um sistema comutado forem triangularizáveis por transformações de semelhança complexas invertíveis do tipo (5.4.2), a existência de um conjunto de FLQs com $(n - z)$ -CSC para um sistema comutado, cujo banco de comutação está associado às matrizes A_p , é equivalente à existência de um conjunto de FLQs com $(n - z)$ -CSC para o sistema comutado cujo banco de comutação está associado às matrizes $T_p^{-1}A_pT_p$, $p \in \mathcal{P}$, Proposição 5.1.4. Por sua vez, como este sistema é triangular em blocos, atendendo ao Teorema 5.4.1, a última condição é equivalente à existência de uma FLQC para os blocos $(1,1)$, de ordem $n - z$, das matrizes $T_p^{-1}A_pT_p$, $p \in \mathcal{P}$. Deste modo obtemos o resultado do seguinte teorema.

Corolário 5.4.3 *Seja $\mathbb{X} = (\mathcal{P}, \Sigma_{\mathcal{P}}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}})$ um sistema comutado cujo banco de comutação está associado a um conjunto de matrizes A_p , $p \in \mathcal{P}$, definidas como em (5.4.1), estáveis e triangularizáveis em blocos por transformações de semelhança T_p do tipo (5.4.2). O sistema \mathbb{X} possui um conjunto de FLQs com $(n - z)$ -CSC se, e só se, o conjunto de blocos $(1,1)$, de ordem $n - z$, das matrizes $T_p^{-1}A_pT_p$, $p \in \mathcal{P}$, possui uma FLQC.*

Então, resulta do Teorema 5.4.1 e do Teorema 4.3.8:

Corolário 5.4.4 *Seja $\mathbb{X} = (\mathcal{P}, \Sigma_{\mathcal{P}}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}})$ um sistema comutado cujo banco de comutação está associado a um conjunto de matrizes A_p , $p \in \mathcal{P}$, definidas como em (5.4.1), estáveis e triangularizáveis em blocos por transformações de semelhança T_p do tipo (5.4.2). Se o conjunto de blocos diagonais $(1,1)$ das matrizes $T_p^{-1}A_pT_p$ possui uma FLQC então, o sistema \mathbb{X} é estabilizável por reset parcial de ordem z .*

É de salientar que é possível estabelecer uma condição menos forte do que a condição iii) do Teorema 5.4.1 que garanta a estabilização por reset parcial de ordem z . Na verdade, para que um sistema comutado triangular em blocos seja estabilizável por reset parcial de ordem z é suficiente que o sistema comutado cujo banco de comutação está associado ao conjunto $\{A_{11}^p, p \in \mathcal{P}\}$ seja estável, sem ser necessário que possua uma FLQC. Vamos estabelecer este resultado para um sistema comutado triangular superior em 2×2 -blocos, podendo enunciar-se um resultado análogo para um sistema comutado triangular inferior em 2×2 -blocos.

Teorema 5.4.5 *Seja $\mathbb{X} = (\mathcal{P}, \Sigma_{\mathcal{P}}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}})$ um sistema comutado cujo banco de comutação está associado a um conjunto de matrizes estáveis:*

$$\left\{ A_p = \begin{bmatrix} A_{11}^p & A_{12}^p \\ 0 & A_{22}^p \end{bmatrix} : A_{11}^p \in \mathbb{R}^{(n-z) \times (n-z)}, p \in \mathcal{P} \right\}.$$

Se o sistema comutado $\mathbb{X}^1 = (\mathcal{P}, \Sigma_{\mathcal{P}}^1, \mathcal{S}_{\mathcal{P}})$, cujo banco de comutação está associado ao conjunto $\{A_{11}^p, p \in \mathcal{P}\}$, é estável então, o sistema \mathbb{X} é estabilizável por reset parcial de ordem z .

Demonstração: Suponhamos que o sistema comutado $\mathbb{X}^1 = (\mathcal{P}, \Sigma_{\mathcal{P}}^1, \mathcal{S}_{\mathcal{P}})$, cujo banco de comutação está associado ao conjunto $\{A_{11}^p, p \in \mathcal{P}\}$, é estável. Então, por definição, para cada $\sigma \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ o correspondente sistema σ -comutado, Σ_{σ}^1 , é estável.

Seja $\sigma \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}$, qualquer. Consideremos o sistema σ -comutado Σ_{σ}^2 , cujo banco de comutação está associado ao conjunto $\{A_{22}^p, p \in \mathcal{P}\}$, e para o qual se permite reposição do estado, x^2 .

Provemos que o sistema Σ_{σ} cujo banco de comutação está associado ao conjunto $\{A_p, p \in \mathcal{P}\}$ é estabilizável por reset parcial de ordem z . Seja $x = \begin{bmatrix} (x^1)^T & (x^2)^T \end{bmatrix}^T$ tal que:

$$x(t_k) = R_{(q,p)} x(t_k^-),$$

com

$$R_{(q,p)} = \text{diag} \left(I_{n-z}, R_{22}^{(q,p)} \right), \quad (5.4.3)$$

onde as matrizes $R_{22}^{(q,p)}$ são escolhidas de acordo com o Corolário 4.3.4. Então, o sistema σ -comutado Σ_{σ}^2 com reset é estável.

Seja $z = \begin{bmatrix} x^1 \\ z^2 \end{bmatrix}$. O sistema variante no tempo obtido do sistema σ -comutado Σ_{σ} , com resets parciais (5.4.3), é dado por:

$$\Sigma_{\sigma}^{RP} := \begin{cases} \dot{x}^1(t) &= A_{11}(t)x^1(t) + A_{12}(t)z^2(t) \\ \dot{z}^2(t) &= \tilde{A}_{22}(t)z^2(t) \end{cases}, \quad (5.4.4)$$

ao qual estão associados os sistemas variantes no tempo estáveis

$$\Sigma_{\sigma}^1 := \dot{x}^1(t) = A_{11}(t)x^1(t) + A_{12}(t)z^2(t) \quad \text{e} \quad \Sigma_{\sigma}^2 := \dot{z}^2(t) = \tilde{A}_{22}(t)z^2(t),$$

onde $A_{11}(t) := (A_{11})^{\sigma(t)}$ e $A_{12}(t) := (A_{12})^{\sigma(t)}$. Pretendemos então provar que o sistema variante no tempo Σ_{σ}^{RP} é estável.

Denotemos por Φ a matriz de transição associada a Σ_σ^1 . Então, de acordo com a Definição 1.1.3, como o sistema Σ_σ^1 é estável, existem constantes positivas γ e λ tais que

$$\|\Phi(t, 0)\| \leq \lambda e^{-\gamma t}, \text{ para todo } t \geq 0, \quad (5.4.5)$$

ou, por ([35], p. 95), existem constantes positivas γ e λ tais que

$$\|\Phi(t, \tau)\| \leq \lambda e^{-\gamma(t-\tau)}, \text{ para todo } t, \tau \text{ tais que } t \geq \tau. \quad (5.4.6)$$

Ora, $\|z(t)\| \leq \|x^1(t)\| + \|z^2(t)\|$ e, porque

$$x^1(t) = \Phi(t, 0)x^1(0) + \int_0^t \Phi(t, \tau)A_{12}(\tau)z^2(\tau)d\tau,$$

obtém-se

$$\|z(t)\| \leq \|\Phi(t, 0)\| \|x^1(0)\| + \int_0^t \|\Phi(t, \tau)\| \|A_{12}(\tau)\| \|z^2(\tau)\| d\tau + \|z^2(t)\|. \quad (5.4.7)$$

Então, por (5.4.6), tem-se

$$\|z(t)\| \leq \lambda e^{-\gamma t} \|x^1(0)\| + \lambda e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\gamma\tau} \|A_{12}(\tau)\| \|z^2(\tau)\| d\tau + \|z^2(t)\|. \quad (5.4.8)$$

Por outro lado, como Σ_σ^2 é estável então, existem constantes positivas α e β tais que

$$\|z^2(t)\| \leq \alpha e^{-\beta t} \|z^2(0)\|, \text{ para todo } t \geq 0. \quad (5.4.9)$$

Então, de (5.4.8), temos

$$\|z(t)\| \leq \lambda e^{-\gamma t} \|x^1(0)\| + \alpha \|z^2(0)\| \lambda e^{-\gamma t} \int_0^t e^{(\gamma-\beta)\tau} \|A_{12}(\tau)\| d\tau + \alpha e^{-\beta t} \|z^2(0)\|. \quad (5.4.10)$$

Seja

$$\psi(\tau) := e^{(\gamma-\beta)\tau} \|A_{12}(\tau)\|. \quad (5.4.11)$$

Assim, (5.4.10) é equivalente a

$$\|z(t)\| \leq \lambda e^{-\gamma t} \left[\|x^1(0)\| + \alpha \|z^2(0)\| \int_0^t \psi(\tau) d\tau \right] + \alpha e^{-\beta t} \|z^2(0)\|. \quad (5.4.12)$$

Ora, sendo $z = [(x^1)^T \ (z^2)^T]^T$ e $(x^1)^2 \leq (x^1)^2 + (z^2)^2$, resulta que $\|x^1\| \leq \|z\|$. Da mesma forma, $\|z^2\| \leq \|z\|$. Logo, de (5.4.12) resulta

$$\|z(t)\| \leq \left(\lambda e^{-\gamma t} \left[1 + \alpha \int_0^t \psi(\tau) d\tau \right] + \alpha e^{-\beta t} \right) \|z(0)\|. \quad (5.4.13)$$

Como $\psi(\tau)$ é uma função limitada e positiva então,

$$1 + \alpha \int_0^t \psi(\tau) d\tau > 0.$$

Considere-se assim, a constante positiva

$$\theta := \lambda \left[1 + \alpha \int_0^t \psi(\tau) d\tau \right].$$

Tendo em conta (5.4.13), existem constantes positivas θ, α e β tais que

$$\|z(t)\| \leq (\theta e^{-\gamma t} + \alpha e^{-\beta t}) \|z(0)\|. \quad (5.4.14)$$

Mas,

$$(\theta e^{-\gamma t} + \alpha e^{-\beta t}) \leq \theta e^{-Nt} + \alpha e^{-Nt},$$

com $N = \min \{\gamma, \beta\}$. Isto é, $(\theta e^{-\gamma t} + \alpha e^{-\beta t}) \leq (\theta + \alpha) e^{-Nt}$. Assim,

$$(\theta e^{-\gamma t} + \alpha e^{-\beta t}) \leq M e^{-Nt},$$

onde $M = \theta + \alpha$ e $N = \min \{\gamma, \beta\}$. Então, para estas constantes temos, atendendo a (5.4.14),

$$\|z(t)\| \leq M e^{-Nt} \|z(0)\|,$$

pelo que o sistema σ -comutado Σ_σ^{RP} , com os resets parciais dados em (5.4.3), é estável. Como $\sigma \in \mathcal{S}_P$ é qualquer, então $\mathbb{X} = (\mathcal{P}, \Sigma_P, \mathcal{S}_P)$ é estabilizável por reset parcial de ordem z . ■

5.5 Sistemas comutados positivos

Em determinadas áreas, como a Biologia, a Biomedicina ou a Economia, surgem problemas que requerem uma restrição de não-negatividade do tipo $x(t) \succeq 0$, para $t \geq 0$, sobre as variáveis de estado, ou seja, é necessário impor que todas as componentes do vector de estado $x(t)$ sejam não-negativas em cada instante t . É este o caso, quando as componentes do estado correspondem a concentrações ou quantidades de certas substâncias (por exemplo, fármacos), no organismo.

Um sistema cuja trajectória de estado tem início numa condição inicial não-negativa e permanece não-negativa nos instantes de tempo subsequentes, é chamado *sistema linear invariante positivo*. É conhecido que, um sistema linear invariante $\dot{x}(t) = Ax(t)$ é positivo se, e só se, todas as entradas não-diagonais da matriz A são não-negativas, [11]. Estas matrizes são conhecidas por *matrizes de Metzler*.

Em [14] é referido que, algumas aplicações recentes em determinadas áreas conduziram a uma extensão da teoria dos sistemas lineares invariantes positivos aos sistemas lineares variantes no tempo, em particular aos sistemas lineares comutados positivos, isto é, aos sistemas comutados cujos bancos de comutação são constituídos por sistemas lineares invariantes positivos, veja-se por exemplo [8]. O estudo da estabilidade desta classe de sistemas comutados tem sido fundamentalmente direccionado para o que muitos autores chamam de estabilidade diagonal e que consiste na análise da existência de uma FLQC diagonal para este tipo de sistemas comutados, veja-se [28, 30] e as respectivas referências.

A finalidade desta secção é, de uma forma breve, determinar em que condições um sistema comutado positivo possui um conjunto de FLQs diagonais com as primeiras $n - z$ entradas diagonais comuns. Nestas condições, garantimos a existência de um conjunto de FLQs com $(n - z)$ -CSC e, por conseguinte, a estabilidade deste tipo de sistemas via reset parcial. A abordagem aqui adoptada toma como ponto de partida o facto de um sistema positivo estável admitir sempre uma FLQ diagonal, que pode ser determinada à custa das componentes de certos vectores positivos. Começamos por definir um sistema comutado positivo.

Um sistema $\mathbb{X} = (\mathcal{P}, \Sigma_{\mathcal{P}}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}})$ diz-se um *sistema comutado positivo* se o banco de comutação $\Sigma_{\mathcal{P}}$, está associado a um conjunto de matrizes de Metzler.

Teorema 5.5.1 [19] *Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz de Metzler. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. A é estável.
2. Existe um vector $v \succ 0$ em \mathbb{R}^n tal que $-Av \succ 0$.
3. $-A^{-1}$ é não-negativa.
4. Existe uma matriz diagonal definida positiva D tal que $A^T D + DA < 0$.

É fácil reconhecer que, se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz de Metzler estável então, A^T também é uma matriz de Metzler estável. Por conseguinte, decorre do resultado anterior que, sendo A uma matriz de Metzler, existem sempre vectores positivos em \mathbb{R}^n tais que

$$-Av \succ 0 \quad \text{e} \quad -A^T w \succ 0. \quad (5.5.1)$$

Daqui em diante, designamos os vectores positivos v e w que verificam (5.5.1) por *vectores de Lyapunov à direita de A e A^T* , respectivamente.

O resultado anterior permite ainda concluir que, para um conjunto de matrizes de Metzler estáveis existe sempre um conjunto de FLQs diagonais. Segundo o próximo resultado, cada uma dessas FLQs pode ser determinada através dos vectores de Lyapunov de cada matriz e da sua transposta, respectivamente.

Teorema 5.5.2 [44] *Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz de Metzler estável. Se v e w são vectores positivos em \mathbb{R}^n tais que*

$$-Av \succ 0 \quad \text{e} \quad -A^T w \succ 0$$

então, A possui uma FLQ diagonal

$$D = \text{diag} \left(\frac{w_1}{v_1}, \frac{w_2}{v_2}, \dots, \frac{w_n}{v_n} \right),$$

onde w_i e $v_i, i = 1, \dots, n$, são as componentes dos vectores v e w , respectivamente.

Com base neste teorema, enunciamos agora uma condição suficiente de existência de um conjunto de FLQs diagonais do tipo $D_p = \text{diag}(P, P_{22}^p), p \in \mathcal{P}$.

Proposição 5.5.3 *Seja $\mathbb{X} = (\mathcal{P}, \Sigma_{\mathcal{P}}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}})$ um sistema comutado cujo banco de comutação está associado ao conjunto de matrizes de Metzler estáveis $\{A_p, p \in \mathcal{P}\}$. Se, para cada p , existirem vectores de Lyapunov à direita de A_p e A_p^T , v_p e w_p com componentes v_{pi} e $w_{pi}, i = 1, \dots, n$, respectivamente, tais que as primeiras $n - z$ componentes satisfazem:*

$$\frac{w_{p1}}{v_{p1}} = d_1, \dots, \frac{w_{pn-z}}{v_{pn-z}} = d_{n-z} \quad (5.5.2)$$

então, \mathbb{X} possui um conjunto de FLQs diagonais com $(n - z)$ -CSC, definidas por

$$D_p = \text{diag} (d_1, d_2, \dots, d_{n-z}, d_{n-z+1}^p, \dots, d_n^p),$$

onde $d_i^p = \frac{w_{pi}}{v_{pi}}$, para $i = n - z + 1, \dots, n$. Mais, o sistema comutado \mathbb{X} é estabilizável por reset parcial de ordem z .

Observação 5.5.4 Dizemos que $v \succ 0$ e $w \succ 0$ são vectores de Lyapunov à direita comuns para A_p e A_p^T , respectivamente, se para todo o $p \in \mathcal{P}$,

$$-A_p v \succ 0 \text{ e } -A_p^T w \succ 0.$$

Se, em particular, os vectores de Lyapunov v_p e w_p do resultado anterior forem constantes, isto é, $v_p \equiv v$ e $w_p \equiv w$, para todo o $p \in \mathcal{P}$, então é óbvio que se verifica a condição (5.5.2) da Proposição 5.5.3. Consequentemente, no âmbito da estabilidade dos sistemas comutados, o resultado que estabelecemos na proposição anterior, generaliza um resultado já conhecido, [34], que afirma que, a existência de vectores de Lyapunov à direita comuns para A_p e A_p^T assegura a existência de uma FLQC diagonal para o sistema comutado associado e, portanto, a respectiva estabilidade.

Exemplo 5.5.5 Seja $\mathbb{X} = (\mathcal{P}, \Sigma_{\mathcal{P}}, \mathcal{S}_{\mathcal{P}})$ um sistema comutado cujo banco de comutação está associado ao conjunto constituído pelas matrizes de Metzler estáveis

$$A_1 = \left[\begin{array}{cc|c} -16 & 0 & 1 \\ 16 & -10 & 0 \\ \hline 100 & 0 & -200 \end{array} \right] \text{ e } A_2 = \left[\begin{array}{cc|c} -3 & 0 & 3 \\ 3 & -5 & 0 \\ \hline 5 & 0 & -6 \end{array} \right].$$

Vejamos que \mathbb{X} possui um conjunto de FLQs diagonais com 2 – CSC.

Consideremos, para cada $p = 1, 2$, os pares de vectores positivos

$$\begin{aligned} v_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}^T & \text{e} & w_1 &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{10} & \frac{1}{20} \end{bmatrix}^T \\ v_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{9}{10} \end{bmatrix}^T & \text{e} & w_2 &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{10} & \frac{51}{100} \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

Então,

$$\frac{w_{11}}{v_{11}} = \frac{w_{21}}{v_{21}} = 1 \text{ e } \frac{w_{12}}{v_{12}} = \frac{w_{22}}{v_{22}} = \frac{1}{2}$$

e

$$\begin{aligned} -A_1 v_1 &= \begin{bmatrix} 14 & 4 & 300 \end{bmatrix}^T \succ 0 & \text{e} & -A_1^T w_1 &= \begin{bmatrix} 9.4 & 1 & 9 \end{bmatrix}^T \succ 0 \\ -A_2 v_2 &= \begin{bmatrix} 0.3 & 7 & 0.4 \end{bmatrix}^T \succ 0 & \text{e} & -A_2^T w_2 &= \begin{bmatrix} 0.15 & 0.5 & 0.06 \end{bmatrix}^T \succ 0. \end{aligned}$$

Logo, pela Proposição 5.5.3, $D_1 = \text{diag}\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $D_2 = \text{diag}\left(1, \frac{1}{2}, \frac{51}{90}\right)$ são FLQs diagonais de A_1 e A_2 , respectivamente. Note-se que, as matrizes A_1 e A_2 não possuem nenhum vector de Lyapunov comum, pois a matriz

$$A_1^{-1} A_2 \approx \begin{bmatrix} 0.1919 & 0 & -0.1916 \\ 0.0071 & 0.5 & -0.3066 \\ 0.0710 & 0 & -0.0658 \end{bmatrix}$$

tem uma coluna de entradas negativas, ([17], p. 22).

Observações 5.5.6

1. Os vectores v_p e w_p , $p = 1, 2$, indicados no exemplo anterior, foram determinados como a seguir explicamos. Consideram-se vectores quaisquer, $v_1 = [x_1 \ y_1 \ z_1]^T$, $w_1 = [l_1 \ m_1 \ n_1]^T$, $v_2 = [x_2 \ y_2 \ z_2]^T$ e $w_2 = [l_2 \ m_2 \ n_2]^T$ e escolhem-se as respectivas componentes tais que $-A_1 v_1 \succ 0$, $-A_2 v_2 \succ 0$, $-A_1^T w_1 \succ 0$ e $-A_2^T w_2 \succ 0$, isto é, tais que

$$\begin{cases} (16x_1 - z_1, -16x_1 + 10y_1, -100x_1 + 200z_1) & \succ 0 \\ (16l_1 - 16m_1 - 100n_1, 10m_1, -l_1 + 200n_1) & \succ 0 \end{cases} \quad (5.5.3)$$

$$\begin{cases} (3x_2 - 3z_2, -3x_2 + 5y_2, 5x_2 + 6z_2) & \succ 0 \\ (3l_2 - 3m_2 - 5n_2, 5m_2, -3l_2 + 6n_2) & \succ 0 \end{cases} \quad (5.5.4)$$

Tomando, por exemplo, $l_1 = x_1 = 1$, (5.5.3) verifica-se se

$$\begin{cases} (16 - z_1, -16 + 10y_1, -100 + 200z_1) & \succ 0 \\ (16 - 16m_1 - 100n_1, 10m_1, -1 + 200n_1) & \succ 0 \end{cases}.$$

Donde,

$$z_1 \in \left] \frac{1}{2}, 16 \right[; \quad y_1 \in \left] \frac{16}{10}, +\infty \right[; \quad n_1 \in \left] \frac{1}{200}, \frac{16 - 16m_1}{100} \right[, \quad \text{com } m_1 \in \left] 0, \frac{31}{32} \right[.$$

Tomando, por exemplo, $l_2 = x_2 = 1$, (5.5.4) verifica-se se

$$\begin{cases} (3 - 3z_2, -3 + 5y_2, -5 + 6z_2) & \succ 0 \\ (3 - 3m_2 - 5n_2, 5m_2, -3 + 6n_2) & \succ 0 \end{cases}.$$

Donde,

$$z_2 \in \left] \frac{5}{6}, 1 \right[; \quad y_2 \in \left] \frac{3}{5}, +\infty \right[; \quad n_2 \in \left] \frac{1}{2}, \frac{3 - 3m_2}{5} \right[, \quad \text{com } m_2 \in \left] 0, \frac{1}{6} \right[.$$

Escolhendo $m_1 = m_2 = 0.1$ e $y_1 = y_2 = 2$, faz-se a escolha dos valores das restantes componentes;

2. As matrizes do exemplo anterior não verificam a condição (5.3.7) do Teorema 5.3.4, para a escolha (óbvia) de $P_1 = I$ e $P_{22}^p = 1$, $p = 1, 2$. De facto, a matriz identidade é uma FLQC para os blocos (1,1) e os blocos (2,2) são estáveis. Então,

$$Q_1^1 = -(A_{11}^1)^T P_1 - P_1 A_{11}^1 = \begin{bmatrix} 32 & -16 \\ -16 & 20 \end{bmatrix}; \quad \lambda_{\min}(Q_1^1) \approx 8.9120$$

$$Q_1^2 = -(A_{11}^2)^T P_1 - P_1 A_{11}^2 = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}; \quad \lambda_{\min}(Q_1^2) \approx 4.3944$$

$$Q_2^1 = -(A_{22}^1)^T P_{22}^1 - P_{22}^1 A_{22}^1 = 400$$

$$Q_2^2 = -(A_{22}^2)^T P_{22}^2 - P_{22}^2 A_{22}^2 = 12.$$

Apesar de,

$$\lambda_{\min}(Q_1^1) > 4 \|P_1 A_{12}^1\|_s \left\| (A_{21}^1)^T P_{22}^1 \right\|_s \left\| (Q_2^1)^{-1} \right\|_s = 1,$$

não se verifica a outra condição do teorema referido, pois

$$\lambda_{\min}(Q_1^2) < 4 \|P_1 A_{12}^2\|_s \left\| (A_{21}^2)^T P_{22}^2 \right\|_s \left\| (Q_2^2)^{-1} \right\|_s = 5.$$

5.6 Considerações finais

Em geral, obter a estabilidade de um sistema comutado por meio da aplicação de resets apenas numa parte das componentes do estado do sistema pode revelar-se, ao invés do caso em que existe total liberdade na aplicação de resets, uma tarefa difícil de executar. Explorámos a resolução deste problema analisando a existência de FLQs com complemento de Schur comum. Apesar da identificação destes conjuntos de FLQs constituir um problema também delicado, quando feita conseguimos determinar famílias de resets parciais com as quais garantimos a estabilidade do sistema comutado associado.

Neste capítulo, analisámos em que condições um sistema comutado satisfaz a propriedade de existência de FLQs com complemento de Schur comum, estabelecendo critérios que fizeram intervir explicitamente as características das matrizes associadas aos bancos de comutação de algumas classes de sistemas comutados. Especificamente, contemplámos os casos em que as matrizes estão na forma companheira, em que as matrizes são de Metzler e em que as matrizes são triangulares em blocos ou transformáveis em matrizes triangulares em blocos por transformações de semelhança complexas invertíveis de determinado tipo. As conclusões retiradas para a última classe de sistemas comutados referida permite-nos agora acrescentar mais algumas considerações aos sistemas de controlo comutado considerados em [15, 16]. Considerações estas, que convergem para algumas das conclusões apontadas nos trabalhos citados e que reflectem uma das aplicações da teoria de sistemas comutados com reset parcial erguida nesta tese. Como já tivemos oportunidade de referir, considerando sistemas de controlo comutado tal como foram apresentados na Secção 3.4 do Capítulo 3, e tomando determinadas realizações para a planta e para os controladores, obtém-se um sistema de controlo comutado em que as matrizes $A_p, p \in \mathcal{P}$, associadas ao respectivo banco de comutação são

simultaneamente triangularizáveis em blocos. De facto, de acordo com ([15], p. 1912), a transformação de semelhança

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ I & 0 & I \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix},$$

triangulariza em blocos todas as matrizes A_p transformando-as em matrizes do tipo

$$\overline{A}_p = \begin{bmatrix} \overline{A}_{11} & \times & \times \\ 0 & \overline{A}_{22}^p & \times \\ 0 & 0 & \overline{A}_{33} \end{bmatrix},$$

para as quais o bloco \overline{A}_{11} é comum e de ordem $n - z$. Como T preserva a propriedade de existência de complemento de Schur comum então, pelo Corolário 5.4.4, conclui-se que o sistema de controlo comutado é estabilizável por reset parcial de ordem z .

Conclusões

Nesta tese, um dos objectivos principais foi estabelecer condições que garantissem a possibilidade de obter a estabilidade de um sistema comutado, à custa de uma escolha de resets adequados.

Sendo a arbitrariedade do sinal de comutação uma premissa na dinâmica dos sistemas estudados, a existência de uma FLQC é uma condição suficiente para garantir a respectiva estabilidade. Consequentemente, procurámos, no Capítulo 2, acrescentar algumas respostas às já dadas para o problema da existência de tal função. Com esse propósito e tendo também em vista os objectivos propostos nesta tese *estabelecemos critérios de estabilidade baseados numa análise em blocos*. Concretamente, considerámos as matrizes associadas ao banco de comutação particionadas em blocos e obtivemos critérios de estabilidade em função desses blocos. Em primeiro lugar, abordámos o caso triangular em blocos. Já era conhecido, [9], que um sistema comutado deste tipo tem uma FLQC se os blocos diagonais situados na mesma posição nas respectivas matrizes associadas ao banco tiverem também uma FLQC. Produzimos uma prova alternativa que é construtiva. Esta prova permitiu estabelecer uma condição suficiente para a existência de FLQC para sistemas comutados com bancos de comutação constituídos por matrizes definidas em blocos, não necessariamente com estrutura triangular.

Ainda no Capítulo 2, estabelecemos outros critérios de existência de FLQC para sistemas comutados não-triangulares definidos em blocos. Os resultados que obtivemos foram importantes para o problema da existência de FLQC para um sistema comutado e para o estudo da respectiva estabilidade, particularmente no que concerne à estabilidade dos sistemas comutados interconectados em série, em paralelo e por realimentação. A utilidade desses resultados sobressaiu também no âmbito da estabilização dos sistemas comutados via reset parcial, estudada no Capítulo 5.

No Capítulo 3, *introduzimos o conceito de sistema linear comutado com reset para o qual nos instantes de comutação, admitimos a hipótese de ocorrerem descontinuidades do*

estado do sistema. Esta situação já tinha sido contemplada no estudo da estabilidade de um sistema de controlo comutado, no trabalho de de J. P. Hespanha e Morse em [15]. Do estudo realizado neste capítulo, constatámos que o método adoptado por estes autores para a obtenção da estabilidade deste tipo de sistema comutado, que consistiu na escolha das realizações adequadas para os controladores não evidencia, aparentemente, nenhuma vantagem de se abdicar da aplicação de resets.

As principais questões colocadas no terceiro capítulo, quanto à estabilidade de um sistema comutado com reset e quanto à estabilização destes sistemas, foram as mesmas que colocámos no Capítulo 4, com a restrição de permitir que os resets a aplicar afectassem apenas uma parte das componentes do estado do sistema. Porém, ao impor esta condição, outras questões se levantaram. Na verdade, neste quadro era de esperar que houvesse necessidade de impor condições adicionais. Neste âmbito destacamos a seguinte conclusão do trabalho realizado: *a existência de uma família de FLQs com complemento de Schur comum de ordem $n - z$ é uma condição suficiente para que um sistema comutado seja estabilizável por reset parcial de ordem z .* De facto, o problema da existência de uma FLQC está para a estabilidade de um sistema comutado assim como o problema da existência de FLQs com complemento de Schur comum está para a estabilização por reset parcial desse sistema.

Após termos concluído que um sistema comutado é estabilizável por reset parcial desde que o mesmo possua um conjunto de FLQs com o mesmo complemento de Schur e reconhecida as dificuldades inerentes a esta questão, no Capítulo 5 *identificámos dentre algumas classes de sistemas comutados, sistemas que possuem um conjunto de FLQs com tal propriedade e que, conseqüentemente, são estabilizáveis por reset parcial.*

Uma vez que a estabilidade de um sistema comutado (sem reset) não é fácil de testar e que existem ainda muitas questões em aberto relativas à existência de FLQC, não era de esperar grandes facilidades no estudo da estabilidade de um sistema comutado com reset. Na realidade, com esta tese contribuímos com a identificação de algumas classes de sistemas com reset estáveis e *conseguimos propor em alguns casos estratégias de escolha de resets parciais que tornam um sistema comutado estável.* Todavia, muitas outras classes ficam por identificar. Deste modo, uma das linhas de orientação de trabalho futuro, que poderá vir a ser frutuosa, é a da identificação dessas outras classes de sistemas comutados. Essa pesquisa poderá prosseguir usando as técnicas utilizadas nesta tese,

mas, sob uma perspectiva geométrica, associada à geometria dos cones convexos, [29], ou poderá envolver a introdução de novos processos.

Outros problemas que poderão ser contemplados em trabalho futuro relacionam-se com outras propriedades estruturais tais como a controlabilidade e a observabilidade.

Apêndice A

Álgebras de Lie

Aqui apresenta-se uma breve síntese sobre álgebras de Lie, em grande parte baseada em [21, 36, 37].

- (i) Uma *álgebra de Lie* \mathfrak{g} é um espaço vectorial de dimensão finita munido do operador comutador ou *parêntesis de Lie*, que é uma função bilinear, anti-simétrica $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ que satisfaz a identidade de Jacobi

$$[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0.$$

- (ii) Dada uma família de matrizes $\{A_p, p \in \mathcal{P}\} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$, define-se a álgebra de Lie gerada por estas matrizes e representamo-la por

$$\mathfrak{g} = \{A_p, p \in \mathcal{P}\}_{AL}$$

como sendo a menor álgebra de Lie com parêntesis $[A, B] = AB - BA$ que contém as matrizes dadas.

- (iii) Se \mathfrak{g}_1 e \mathfrak{g}_2 são subespaços lineares de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} , então $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2]$ representa o espaço linear gerado por todos os produtos $[g_1, g_2]$ com $g_1 \in \mathfrak{g}_1$ e $g_2 \in \mathfrak{g}_2$, e definimos a sequência $\mathfrak{g}^{(k)}$ como:

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}^{(1)} &:= \mathfrak{g} \\ \mathfrak{g}^{(k+1)} &:= [\mathfrak{g}^{(k)}, \mathfrak{g}^{(k)}] \subset \mathfrak{g}^{(k)}.\end{aligned}$$

Por exemplo, se \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie gerada por duas matrizes A e B , isto é, $\mathfrak{g} = \{A, B\}_{AL}$, então

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}^{(1)} &= \mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g} = \text{span} \{A, B, [A, B], [A, [A, B]], \dots\} \\ \mathfrak{g}^{(2)} &= \mathfrak{g}^2 = \text{span} \{[A, B], [A, [A, B]], \dots\} \\ \mathfrak{g}^{(3)} &= \text{span} \{[[A, B], [A, [A, B]]], \dots\} \subset \mathfrak{g}^3 = \text{span} \{[A, [A, B]], [B, [A, B]], \dots\}\end{aligned}$$

e assim sucessivamente.

- (iv) Se existir k^* tal que $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$ para um $k \geq k^*$, então \mathfrak{g} diz-se *solúvel*. Por exemplo, se as matrizes do conjunto $\{A_p, p \in \mathcal{P}\}$ comutarem aos pares, então $A_p A_q - A_q A_p = 0$, o que é equivalente a $[A_p, A_q] = 0, p, q \in \mathcal{P}$. Logo, a álgebra de Lie gerada pelas matrizes A_p é solúvel.

Exemplo A.0.1 [37] *A álgebra de Lie gerada por todas as matrizes triangulares superiores 2×2 é solúvel. De facto, a álgebra de Lie gerada por estas matrizes, \mathfrak{g} , é*

$$\mathfrak{g} = \text{span} \{t_1, t_2, t_3\},$$

onde $t_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $t_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $t_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Então, por definição de parêntesis de Lie, temos $[t_1, t_2] = t_2$, $[t_1, t_3] = 0$ e $[t_3, t_2] = -t_2$. Assim,

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}^{(1)} &= \mathfrak{g} = \text{span} \{t_1, t_2, t_3\} \\ \mathfrak{g}^{(2)} &:= [\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}] = \text{span} \{[t_1, t_2], [t_1, t_3], [t_3, t_2]\} = \text{span} \{t_2\} \\ \mathfrak{g}^{(3)} &= [\mathfrak{g}^{(2)}, \mathfrak{g}^{(2)}] = \text{span} \{[t_2, t_2]\} = 0,\end{aligned}$$

pelo que \mathfrak{g} é solúvel com $k^* = 3$.

Proposição A.0.2 *Sejam A, B duas matrizes em $\mathbb{R}^{n \times n}$. Se A e B são simultaneamente triangularizáveis, então $[A, B]$ é nilpotente.*

Demonstração: Suponhamos que existe uma matriz complexa invertível T tal que $A = T\tilde{A}T^{-1}$ e $B = T\tilde{B}T^{-1}$, sendo

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & & & \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \tilde{a}_{n1} & \tilde{a}_{n1} & \dots & \tilde{a}_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_{11} & & & \\ \tilde{b}_{21} & \tilde{b}_{22} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \tilde{b}_{n1} & \tilde{b}_{n1} & \dots & \tilde{b}_{nn} \end{bmatrix}.$$

Então,

$$\begin{aligned} [A, B] = AB - BA &= T\tilde{A}T^{-1}T\tilde{B}T^{-1} - T\tilde{B}T^{-1}T\tilde{A}T^{-1} \\ &= T[\tilde{A}, \tilde{B}]T^{-1} \end{aligned} \quad (\text{A.0.1})$$

e $[\tilde{A}, \tilde{B}]$ é uma matriz triangular do mesmo tipo que \tilde{A} e \tilde{B} , mas com valores próprios nulos, isto é,

$$[\tilde{A}, \tilde{B}] = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ * & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ * & * & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, $\tilde{A}\tilde{B} - \tilde{B}\tilde{A}$ é uma matriz nilpotente com índice de nilpotência igual à ordem dessa matriz, ou seja,

$$([\tilde{A}, \tilde{B}])^n = 0. \quad (\text{A.0.2})$$

Mas, atendendo a (A.0.1), temos

$$\begin{aligned} ([A, B])^n &= T(\tilde{A}\tilde{B} - \tilde{B}\tilde{A})T^{-1}T(\tilde{A}\tilde{B} - \tilde{B}\tilde{A})T^{-1} \dots T[\tilde{A}, \tilde{B}]T^{-1} \\ &= T([\tilde{A}, \tilde{B}])^n T^{-1}, \end{aligned}$$

o que, por (A.0.2), é equivalente a

$$([A, B])^n = 0.$$

■

Apêndice B

Matrizes simétricas definidas positivas

Uma matriz hermítica P em $\mathbb{C}^{n \times n}$ (ou simétrica, quando P é uma matriz em $\mathbb{R}^{n \times n}$) diz-se *definida positiva* (*semi-definida positiva*) e denota-se por $P > 0$ ($P \geq 0$) se

$$x^*Px > 0 \text{ (} x^*Px \geq 0 \text{)}, \text{ para todo o vector não-nulo } x \in \mathbb{C}^n \text{ (ou } \mathbb{R}^n \text{)}.$$

Teorema B.0.3 ([12], p. 52) *Seja P uma matriz hermítica. As seguintes propriedades são equivalentes:*

1. *P é definida positiva;*
2. *Todos os valores próprios da matriz P são positivos;*
3. *Todos os valores próprios das submatrizes principais de P são positivos;*
4. *Existe uma matriz invertível C tal que $P = CC^*$;*
5. *Existe uma matriz unitária U (uma matriz ortogonal U , quando P é uma matriz real) e uma matriz diagonal D com os elementos diagonais positivos tais que $P = UDU^*$.*

Teorema B.0.4 (Desigualdade de Rayleigh-Ritz) ([20], p. 176) *Para qualquer vector em \mathbb{R}^n e qualquer matriz simétrica P em $\mathbb{R}^{n \times n}$,*

$$\lambda_{\min}(P) \|x\|^2 \leq x^T Px \leq \lambda_{\max}(P) \|x\|^2.$$

Teorema B.0.5 [31] *Sejam A e B duas matrizes simétricas em $\mathbb{R}^{n \times n}$. Então,*

1. $\lambda_{\min}(A) + \lambda_{\min}(B) \leq \lambda_{\min}(A + B);$
2. $\lambda_{\max}(A + B) \leq \lambda_{\max}(A) + \lambda_{\max}(B);$
3. $\lambda_{\min}(A)\lambda_{\min}(B) \leq \lambda_{\min}(AB);$
4. $\lambda_{\max}(AB) \leq \lambda_{\max}(A)\lambda_{\max}(B).$

Teorema B.0.6 ([20], p. 472) *Seja P uma matriz simétrica e definida positiva tal que*

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix}.$$

Então, $P^{-1} > 0$ e

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} (P_{11} - P_{12}P_{22}^{-1}P_{12}^T)^{-1} & P_{11}^{-1}P_{12}(P_{12}^TP_{11}^{-1}P_{12} - P_{22})^{-1} \\ (P_{12}^TP_{11}^{-1}P_{12} - P_{22})^{-1}P_{12}^TP_{11}^{-1} & (P_{22} - P_{12}^TP_{11}^{-1}P_{12})^{-1} \end{bmatrix}.$$

Teorema B.0.7 ([12], p. 56) *Seja $G \in \mathbb{C}^{n \times n}$ uma matriz invertível. Se P é uma matriz definida positiva então, GPG^* é definida positiva.*

Observação B.0.8 *Note-se que o recíproco do teorema anterior é válido. De facto, se G uma matriz invertível e GPG^* é uma matriz definida positiva então,*

$$xGPG^*x > 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}.$$

*Como $xGPG^*x = (Gx)^*P(Gx)$ então,*

$$(Gx)^*P(Gx) > 0,$$

para toda a matriz invertível G e para todo o $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Logo, P é uma matriz definida positiva.

Teorema B.0.9 *Se P e Q são matrizes simétricas e definidas positivas com a mesma ordem, então*

1. $P + Q > 0$, ([20], p. 398);
2. $P - Q > 0$ se, e só se, $Q^{-1} - P^{-1} > 0$, ([20], p. 471);
3. $P - Q \geq 0$ se, e só se, $\lambda_{\min}(P) \geq \lambda_{\max}(Q)$, ([20], p. 471).

Teorema B.0.10 *Considere-se a matriz hermítica*

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix}$$

tal que P_{22} é uma matriz quadrada invertível (P_{11} é uma matriz quadrada invertível). As seguintes condições são equivalentes:

1. $P > 0$;
2. $P_{22} > 0$ e $P_{11} > P_{12}P_{22}^{-1}P_{12}^T$ ($P_{11} > 0$ e $P_{22} > P_{12}^TP_{11}^{-1}P_{12}$), ([20], p. 472)
3. $\lambda_{\min}(P_{22}) > 0$ e $\lambda_{\min}(P_{11}) > \lambda_{\max}(P_{12}P_{22}^{-1}P_{12}^T)$
 $(\lambda_{\min}(P_{11}) > 0$ e $\lambda_{\min}(P_{22}) > \lambda_{\max}(P_{12}^TP_{11}^{-1}P_{12}))$

Proposição B.0.11 *Sejam $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz estável e $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica e definida positiva. Então, $A^TP + PA < 0$ se, e só se, $P^{-1}A^T + AP^{-1} < 0$.*

Demonstração: Sejam $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz estável e $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica e definida positiva. Suponhamos que

$$A^TP + PA < 0, \tag{B.0.1}$$

isto é,

$$PP^{-1}A^TP + PAP^{-1}P < 0$$

o que é equivalente a

$$P(P^{-1}A^T + AP^{-1})P < 0.$$

Logo, pelo Teorema B.0.7 e pela Observação B.0.8, a condição anterior é equivalente a

$$P^{-1}A^T + AP^{-1} < 0. \tag{B.0.2}$$

■

Apêndice C

Outro resultado

Proposição C.0.12 *Sejam $x_1, x_2, \dots, x_N, y_1, y_2, \dots, y_N \in \mathbb{R}$.*

1. $\max [x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_N + y_N] \leq \max [x_1, x_2, \dots, x_N] + \max [y_1, y_2, \dots, y_N]$
2. $\min [x_1, x_2, \dots, x_N] + \min [y_1, y_2, \dots, y_N] \leq \min [x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_N + y_N]$.

Demonstração: Como, para todo o $i = 1, \dots, N$,

$$\max [x_1, x_2, \dots, x_N] \geq x_i \quad \text{e} \quad \max [y_1, y_2, \dots, y_N] \geq y_i$$

então,

$$\max [x_1, x_2, \dots, x_N] + \max [y_1, y_2, \dots, y_N] \geq x_i + y_i, \text{ para todo o } i = 1, \dots, N. \quad (\text{C.0.1})$$

Mas,

$$\max [x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_N + y_N] = x_i + y_i, \text{ para algum } i = 1, \dots, N.$$

Então, por (C.0.1), resulta

$$\max [x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_N + y_N] \leq \max [x_1, x_2, \dots, x_N] + \max [y_1, y_2, \dots, y_N].$$

Provemos 2.. Como, para todo o $i = 1, \dots, N$,

$$\min [x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_N + y_N] = -\max [-x_1 - y_1, -x_2 - y_2, \dots, -x_N - y_N]$$

e, por 1.,

$$-\max [-x_1 - y_1, -x_2 - y_2, \dots, -x_N - y_N]$$

$$\geq -\max[-x_1, -x_2, \dots, -x_N] - \max[-y_1, -y_2, \dots, -y_N],$$

resulta

$$\begin{aligned} \min[x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_N + y_N] \\ \geq -\max[-x_1, -x_2, \dots, -x_N] - \max[-y_1, -y_2, \dots, -y_N]. \end{aligned}$$

Mas,

$$-\max[-x_1, -x_2, \dots, -x_N] = \min[x_1, x_2, \dots, x_N]$$

e

$$\max[-y_1, -y_2, \dots, -y_N] = \min[y_1, y_2, \dots, y_N].$$

Logo,

$$\min[x_1, x_2, \dots, x_N] + \min[y_1, y_2, \dots, y_N] \leq \min[x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_N + y_N].$$

■

Bibliografia

- [1] A. Agrachev and D. Liberzon. Lie-algebraic stability criteria for switched systems. *SIAM Journal Control Optimization*, 40:253–269, 2001.
- [2] Linda J.S. Allen. *Introduction to Mathematical Biology*. Prentice Hall, 2007.
- [3] M. S. Branicky. Multiple lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998.
- [4] I. Brás, A. Carapito, and P. Rocha. Stability of interconnected switched systems. In *Proceedings of the 7th Portuguese Conference on Automatic Control*, 2006.
- [5] I. Brás, A. Carapito, and P. Rocha. Stability of reset switched systems. In *Proceedings of the 8th Portuguese Conference on Automatic Control*, 2008.
- [6] D. Carlson. What are Schur complements, anyway? *Linear Algebra and its Applications*, 74:257–275, 1986.
- [7] Z. Chen and Y. Gao. The computation of a common quadratic Lyapunov function for a linear control system. *Journal of Information and Computing Science*, 2(4), 2007.
- [8] Z. Chen and Y. Gao. On common linear copositive lyapunov functions for pairs of stable positive linear systems. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, In Press, Corrected Proof, 2009.
- [9] D. Cheng, L. Guo, and J. Huang. On quadratic Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48:885–890, 2003.
- [10] D. D. Liberzon and A.S. Morse. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems*, 19:59–70, 1999.

- [11] L. Farina and S. Rinaldi. *Positive linear systems*. Wiley Interscience Series, 2000.
- [12] M. Fiedler. *Special matrices and their applications in numerical mathematics*. Martinus Nijhoff Publishers, 1986.
- [13] G. Guo, S. Yu, and Z. Ma. Some properties of networked reset control systems. *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, 153(1), 2006.
- [14] L. Gurvits, R. Shorten, and O. Mason. On the stability of switched positive linear systems. *IEEE transactions on Automatic Control*, 52(4), 2007.
- [15] J. P. Hespanha and A.S. Morse. Switching between stabilizing controllers. *Automatica*, 38:1905–1917, 2002.
- [16] J.P. Hespanha, P. Santesso, and G. Stewart. Optimal controller initialization for switching between stabilizing controllers. In *46th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 5634–5639. 46th IEEE Conference on Decision and Control, 2007.
- [17] D. Hinrichsen and E. Plischke. Robust stability and transient behaviour of positive linear systems. *Vietnam Journal of Mathematics*, 35(4):429–462, 2007.
- [18] Diederich Hinrichsen and Anthony J. Pritchard. *Mathematical Systems Theory I: Modelling, State Space Analysis, Stability and Robustness.*, volume 48 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer Verlag, 2005.
- [19] R. Horn and C. Johnson. *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1981.
- [20] R. Horn and C. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1985.
- [21] J. E. Humphreys. *Introduction to Lie algebras and representation theory*. Springer-Verlag, 1972.
- [22] K. Jbilou, A. Messaoudi, and K. Tabaâ. Some Schur complement identities and applications to matrix extrapolation methods. *Linear Algebra and its Applications*, 392:195–210, 2004.
- [23] T. J. Laffey. Simultaneous triangularization of matrices - low rank cases and non-derogatory case. *Linear and Multilinear Algebra*, 6(1):269–305, 1978.

- [24] V. Lakshmikantham, D. D. Bainov, and P. S. Simeonov. *Theory of Impulsive Differential Equations*. World Scientific, Singapore, 1989.
- [25] D. Liberzon, J. P. Hespanha, and A.S. Morse. Stability of switched systems: a lie-algebraic condition. *Systems Control Letters*, 37(3), 1999.
- [26] Daniel Liberzon. *Switching in Systems and Control*. Birkhauser, Boston, 2003.
- [27] Hai Lin and P.J. Antsaklis. Stability and stabilizability of switched linear systems: A survey of recent results. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 54(2), 2009.
- [28] O. Mason and R. Shorten. Some results on the stability of positive switched linear systems. In *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4601–4606, 2004.
- [29] O. Mason and R. Shorten. The geometry of convex cones associated with the Lyapunov inequality and the common Lyapunov function problem. *Electronic Journal of Linear Algebra*, 12:42–63, 2005.
- [30] O. Mason and R. Shorten. On the simultaneous diagonal stability of a pair of positive linear systems. *Linear Algebra and its Applications*, 413:13–23, 2006.
- [31] J. K. Merikoski and R. Kumar. Inequalities for spreads of matrix sums and products. *Applied Mathematics E-Notes*, 4:150–159, 2004.
- [32] K. S. Narendra and J. Balakrishnan. A common lyapunov function for stable LTI systems with commuting \mathcal{A} -matrices. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(4):2469–2471, 1994.
- [33] N. Oleg and K. Narendra. On the existence of diagonal solutions to the Lyapunov equation for a third order systems. In *Proceedings of the American Control Conference*, 2003.
- [34] T. Ooba and Y. Funahashi. Two conditions concerning common quadratic Lyapunov functions for linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(5):719–721, 1997.
- [35] W. J. Rugh. *Linear System Theory*. Prentice-Hall, 1993.

- [36] H. Samelson. *Notes on Lie algebras*. Springer-Verlag, 1990.
- [37] E. Santos. Estabilidade em esquemas de controlo comutado. Master's thesis, Universidade de Aveiro, 2002.
- [38] Fabian Shorten, Robertand Wirth, Oliver Mason, Kai Wulff, and Christopher King. Stability criteria for switched and hybrid systems. *SIAM Review*, 49(4):545–592, 2007.
- [39] R. N. Shorten and K. S. Narendra. On the stability and existence of commom Lyapunov functions for stable linear switching systems. In *Proccedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3723–3724, 1998.
- [40] R. N. Shorten and K. S. Narendra. Necessary and sufficient condictiones for the existence of a commom quadratic Lyapunov function for a finite number of stable second order linear time-invariant systems. *Int. J. Adapt. Control Signal Process.*, 16:709–728, 2002.
- [41] R. N. Shorten and K. S. Narendra. On common quadratic Lyapunov functions for pairs of stable LTI systems whose system matrices are in companion form. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(4):618–621, 2003.
- [42] R.N. Shorten and K.S. Narendra. Necessary and sufficient conditions for the existence of a common quadratic lyapunov function for two stable second order linear time-invariant systems. In *American Control Conference*, volume 2, pages 1410–1414. American Control Conference, 1999.
- [43] Robert Shorten and Kumpati S. Narendra. On a theorem of redheffer concerning diagonal stability. *Linear Algebra and its Applications*, In Press, Corrected Proof, 2009.
- [44] D. M. Stipanovic and D. D. Siljak. Stability of polytopic systems via convex M-matrices and parameter-dependent Lyapunov functions. *Nonlinear Analysis*, 40:589–609, 2000.
- [45] Z. Sun and S. S. Ge. *Switched Linear Systems: Control and Design*. Springer-Verlag, 2005.

- [46] B. Wang, X. Zhang, and F. Zhang. Some inequalities on generalized Schur complements. *Linear Algebra and its Applications*, 302-303:163–172, 1999.
- [47] Robert L. Williams II and Douglas A. Lawrence. *Linear State-Space Control Systems*. John Wiley And Sons, Ltd, 2007.
- [48] H. Ye, A. N. Michel, and L. Hou. Stability analysis of systems with impulse effects. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(12):1719–1723, 1998.
- [49] H. Ye, A. N. Michel, and L. Hou. Stability theory for hybrid dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(4):461–474, 1998.
- [50] F. Zhang. A matrix identity on the Schur complement. *Linear and Multilinear Algebra*, 52(5):367–373, 2004.
- [51] F. Zhang. *The Schur Complement and its Applications*, volume 4. Springer Verlag, 2005.
- [52] Ya-Hong Zhu, Dai-Zhan Cheng, and Hua-Shu Qin. Constructing common quadratic lyapunov functions for a class of stable matrices. *Acta Automatica Sinica*, 33(2):202 – 204, 2007.